2.1) Sia $V = \mathbf{R}^3$. Siano fissati i vettori

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e si ponga $U = span(\vec{v}_1)$.

a) Determinare la dimensione ed una base di V/U.

b) Posto $\vec{v}_2 + U = [\vec{v}_2]$ e $\vec{v}_3 + U = [\vec{v}_3]$, verificare che $\overline{\mathcal{B}} = \{[\vec{v}_2], [\vec{v}_3]\}$ è una base di V/U.

c) Detta $\pi: V \to V/U$ la proiezione canonica, determinare le componenti di $\pi(\vec{e}_1)$, $\pi(\vec{e}_2)$, $\pi(\vec{e}_3)$ in base $\overline{\mathcal{B}}$.

Soluzione a) Dim V/U= dim V - dim U = 3-1 = 2. Come base di V/U posso considerare ad esempio $[\vec{e}_2]$ e $[\vec{e}_3]$, oppure la base suggerita nel punto seguente.

b) È sufficiente osservare che $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ è una base di V che completa la base $\vec{v}_1$ di U; infatti $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti e U è in somma diretta con $Span(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$ perchè i vettori non nulli di U hanno la prima coordinata non nulla (mentre $Span(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 0\}$).

c) La proiezione π è definita da $\pi(\vec{v}) = [\vec{v}]$. Per rispondere alla domanda, posso determinare le coordinate di $\vec{e}_1$ nella base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Risolvendo il sistema lineare, ricavo che $\vec{e}_1 = \vec{v}_1 - (2/3)\vec{v}_2 - (2/3)\vec{v}_3$; ne deduco che $[\vec{e}_1] = [\vec{v}_1] - (2/3)[\vec{v}_2] - (2/3)[\vec{v}_3] = -(2/3)[\vec{v}_2] - (2/3)[\vec{v}_3]$ che ha componenti $(-2/3, -2/3)$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$. Analogamente, $[\vec{e}_2] = (2/3)[\vec{v}_2] - (1/3)[\vec{v}_3]$ che ha componenti $(2/3, -1/3)$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$. Infine, $[\vec{e}_3] = (1/3)[\vec{v}_2] + (1/3)[\vec{v}_3]$ che ha componenti $(1/3, 1/3)$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$.

2.2) Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4/W$ l'applicazione definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [3x_1 + 5x_3, 2x_4, 3x_2 + x_4, x_1 + x_2]$.

a) Determinare la dimensione ed una base di Ker f.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im f.

c) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica nel dominio, e alla base $[\vec{e}_1 + \vec{e}_3], [\vec{e}_1 - \vec{e}_3]$ nel codominio.

2.3) Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori $\vec{u}_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $\vec{u}_2 = (0, 3, 1, -1)$ e si $\pi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/U$ la proiezione. Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 + x_5, x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4)$.

Discutere l'esistenza di una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^5/U \to \mathbf{R}^2$ tale che $f = g \circ \pi$. In caso positivo, determinare una tale applicazione g e discuterne l'eventuale unicità.

2.4) Consideriamo $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$.

2.1.1) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7 - 3i, 11 + 4i, 16 + 54i)$. Determinare, inoltre, il coniugato di $\vec{v}$.

2.1.2) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (2 - i, 3i, 1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (1 + i, 4 - i, 3 - i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

2.1.3) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ e $\vec{v}_2 = (4 - 2i, 10 + 10i, -5 + 5i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

2.1.4) Discutere se il vettore $\vec{v}_1 = (1 - i, 4 + 2i, -1 + 2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20 + 15i, 12 - 9i, 8 - 6i)$) è multiplo di un vettore reale.

2.1.5) Determinare il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+2i & -1+3i & 3+i \\ 4i & -4+2i & 2+4i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+3i & 3+i \\ 1-i & 5+2i & 2+2i \end{pmatrix}$.

Nello spazio complesso, sia assegnato un riferimento $\mathcal{R}$. Con "discutere la mutua posizione tra due rette r e s" si intende "determinare se la retta r è complanare (e, in tal caso, se è parallela o incidente) o sghemba a s".

2.6) Determinare equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale r passante per $P(2, 3-i, 6i)$.

2.7) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$3ix_1 + x_2 + (5+18i)x_3 - (7+27i) = 0, x_1 + ix_2 + (6+5i)x_3 - 9 - 7i = 0.$$

Determinare un vettore direttore della retta r e discutere se la giacitura della retta è reale.

2.8) Determinare se il piano π di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 + i = 0$ ha punti reali. Sia π il piano di equazione cartesiana $3ix_1 - 5x_2 + (2-i)x_3 + 5 = 0$.

a) Determinare una base della giacitura e equazioni parametriche per π.

b) Determinare una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo se il piano π è reale.

2.9) Il piano α (rispettivamente, β) ha equazione cartesiana $x_1 - x_2 + ix_3 + 5 = 0$ (risp., $x_1 + ix_2 + ix_3 + 3 = 0$).

a) Usando i minori, determinare un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.

b) Determinare la posizione relativa tra r e la coniugata $\overline{r}$.

2.10) Siano fissati il punto $P(3+i, 2-i, -3+2i)$ e i piani α e β di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i-3)x_1 + ix_2 + x_3 - 4i + 1 = 0, \quad \beta : -3ix_1 + ix_3 + 1 = 0.$$

a) Determinare equazioni cartesiane reali di una retta reale s passante per P, se essa esiste.

b) Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.

c) Determinare l'equazione del fascio di piani paralleli a α.

d) Discutere se il piano α è reale e determinare un vettore parallelo sia ad α che ad $\overline{\alpha}$.

e) Discutere se la giacitura di β è reale. Qual'è l'intersezione tra β e il coniugato $\overline{\beta}$?

2.11) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + (2i-3)x_2 + 2ix_3 + i = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 - i = 0.$$

a) Discutere la posizione relativa di r e della sua coniugata.

b) Discutere se r ha punti reali.

2.12) Sia r la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 7i\,t, y = 3 - (1+i)\,t, z = 2$.

a) Discutere se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

b) Discutere l'esistenza di un piano reale contenente r.

2.13) Sia r la retta di equazioni cartesiane $ix - (5+6i)\,y + z + 4 = 0, (5+5i)\,y - (1+i)\,z = -1 - i$. Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per r, se tale piano esiste.

Nel piano complessificato, sia assegnato un riferimento.

2.14) Determinare il fascio di rette per $P(2i-1, 5+7i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento. Determinare le rette reali in tale fascio.

2.15) Determinare il fascio di rette parallele al vettore $(5i, 1+i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

2.16) Determinare il vettore parallelo alla coniugata della retta r di equazione $2x+(3-i)y+2-3i=0$. Discutere inoltre se r è reale e quale sia l'intersezione tra r e la sua coniugata.

2.17) Determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2,-7)$. E' possibile determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2+6i, i-1)$?

ALTRI ESERCIZI (più semplici): Nello spazio complessificato $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$, sia assegnato un riferimento reale $\mathcal{R}$. Si considerino fissati i punti $A(2-7i, 5, i+4)$, $B(1, 12-4i, 9i)$, $D(1-7i, -17, i+9)$, $G(14i-1, 26-12i, 25i-8)$, $H(-4+i, 2+11i, 16-3i)$.

2.18) Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta passante per A e B.

2.19) Controllare se i punti A, B, G sono allineati (cioè se esiste una retta che li contiene tutti e tre).

2.20) Determinare un vettore parallelo alla retta s di equazioni: $3x-(2+i)y+iz=0, 5ix+4z+i=0$. Discutere se la giacitura di s è un sottospazio reale dello spazio dei vettori complessi.

2.21) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per $P(1,1,1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$. Qual è l'intersezione tra r e l'immagine $\overline{r}$ di r rispetto al coniugio?

2.22) Determinare una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano α passante per A, B, H. Tale piano è unico? Determinare inoltre la giacitura del piano α e discutere se tale giacitura è un sottospazio reale dello spazio dei vettori liberi.

2.23) Determinare le coordinate del vettore libero $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia ordinata (A, B). Determinare, inoltre, le coordinate del vettore coniugato $\overline{\mathbf{v}}$. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di $\mathbf{v}$.

2.24) Controllare se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

2.25) Siano $\vec{u} = (1-i, 4+i, i)$, $\vec{w}_1 = (2+i, 3, 1-3i)$, $\vec{w}_2 = (3+i, 3+3i, -2+4i)$. Discutere se il sottospazio $U = Span(\vec{u})$ (risp., $W = Span(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$) è reale.

2.26) Si consideri l'inclusione naturale ι dell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata (A, D) rappresenta un vettore appartenente all'immagine di ι?

2.27) Sia r l'insieme dei punti di coordinate $(1+i+t(-i), 5+t(2-6i), t)$, al variare di $t \in \mathbf{C}$. Descrivere l'immagine di r rispetto al coniugio.

2.28) Fissati i punti $L(3+i, 2i, 9-3i)$ e $M(3, -1+i, -i)$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{LM}$.

2.29) Controllare se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e quello generato da $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

2.30) Determinare una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}^3$ del sistema lineare:

$$\begin{cases} (2-i)x - 3y + z = 0 \\ 3x + (1+i)y + iz = 0 \end{cases}$$