Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 1 a.a. 2013-14 seconda settimana

2.1) Considera due applicazioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ tra insieme non vuoti. Mostra che:

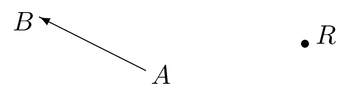
(i) se la composizione $g \circ f$ di funzioni è iniettiva, allora f è iniettiva.

(ii) se la composizione $g \circ f$ di funzioni è suriettiva, allora g è suriettiva.

2.2) Nel piano euclideo, considera il vettore applicato $\vec{AB}$ in figura.

a) Disegna un rappresentante per il vettore $\mathbf{v}$ che ha la stessa direzione del vettore rappresentato dal segmento orientato $\vec{AB}$, lo stesso verso e il modulo doppio.

b) Determina un punto T tale che $\vec{RT}$ sia equipollente a $\vec{AB}$



2.3) Nel piano euclideo, mostra che, se A, B, C sono tre punti distinti del piano allora

$$\vec{0} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}.$$

2.4) Nel piano euclideo, mostra che, se A, B, C, D, sono quattro punti distinti allora

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}.$$

$$\vec{0} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}.$$

2.5) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ i vettori liberi rappresentati dai tre spigoli di un cubo uscenti da uno stesso vertice. Rappresentare il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

2.6) Considera l'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi nello spazio euclideo $\mathbf{E}$.

Sia $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ un vettore tale che $3\mathbf{u} + 5\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Descrivi $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Considera tre vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathcal{V}$ tali che $\mathbf{w}_3 = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$ per opportuni a, $b \in \mathbf{R}$, cioè $\mathbf{w}_3$ sia combinazione lineare di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Mostra che, se $\mathbf{w}$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, allora $\mathbf{w}$ è anche combinazione lineare di $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$.

2.7) Nel piano euclideo, sia assegnato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = (P, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ e denota con (a_1, a_2) le coordinate di un punto S rispetto a tale riferimento. Poni $\vec{v}'_1 = 4\vec{v}_1, \vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Determina le coordinate (a'_1, a'_2) di S nel sistema di riferimento $\mathcal{R}' = (P, \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2\})$ in funzione di (a_1, a_2).

2.8) Considera l'insieme $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ dotato delle seguenti operazioni di somma e prodotto:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2 \\ (0,0) & \mapsto & 0+0=0 \\ (0,1) & \mapsto & 0+1=1 \\ (1,0) & \mapsto & 1+0=1 \\ (1,1) & \mapsto & 1+1=0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 & \to & \mathbf{Z}_2 \\ (0,0) & \mapsto & 0 \cdot 0=0 \\ (0,1) & \mapsto & 0 \cdot 1=0 \\ (1,0) & \mapsto & 1 \cdot 0=0 \\ (1,1) & \mapsto & 1 \cdot 1=1 \end{array}$$

Verifica che $(\mathbf{Z}_2, +, \cdot)$ è un campo.

2.9) Considera l'insieme $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ dotato delle seguenti operazioni di somma e prodotto:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3 & \to & \mathbf{Z}_3 \\ (0,0) & \mapsto & 0+0=0 \\ (0,1) & \mapsto & 0+1=1=1+0 \\ (0,2) & \mapsto & 0+2=2=2+0 \\ (1,1) & \mapsto & 1+1=2 \\ (1,2) & \mapsto & 1+2=0=2+1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3 & \to & \mathbf{Z}_3 \\ (0,0) & \mapsto & 0 \cdot 0=0 \\ (0,1) & \mapsto & 0 \cdot 1=0=1 \cdot 0 \\ (0,2) & \mapsto & 0 \cdot 2=0=2 \cdot 0 \\ (1,1) & \mapsto & 1 \cdot 1=1 \\ (1,2) & \mapsto & 1 \cdot 2=2=2 \cdot 1 \end{array}$$

Verifica che $(\mathbf{Z}_3, +, \cdot)$ è un campo.

2.10) In $\mathbf{R}^2$, considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,3)$, $\mathbf{v}_3 = (2,2)$. Considera inoltre i vettori $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

(i) Calcola $3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, rispettivamente.

(ii) Determina $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{v}_2 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, cioè descrivi $\mathbf{v}_2$ come combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$.

(iii) Descrivi $\mathbf{v}_3$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ ed $\mathbf{v}_2$;

(iv) Descrivi $\mathbf{e}_1$ (risp., $\mathbf{e}_2$) come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ ed $\mathbf{v}_2$;

(v) Rappresenta $\mathbf{R}^2$ come un piano cartesiano. Disegna $\mathbf{v}_1$, $3\mathbf{v}_1$ e $(1/2)\mathbf{v}_1$. Disegna anche $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

2.11) Nel piano euclideo, considera un esagono regolare e indica con C il suo centro. Disegna l'esagono con il suo centro, e assegna i nomi R, S, T a tre vertici tali che $\vec{CR} + \vec{CS} + \vec{CT} = \vec{0}$.

2.12) Nello spazio euclideo, siano assegnati due punti distinti A e B. Sia C il punto tale che $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Mostra che $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{0}$ e che C è l'unico punto con questa proprietà. (Il punto C così definito è detto il *punto medio* di A e B (o del segmento $\overline{AB}$), perché è allineato con A e B e i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ sono congruenti)

2.13) Nel piano euclideo, siano assegnati tre punti non allineati A, B, D. Sia T (tale che $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AT}$) l'ulteriore vertice del parallelogramma di lati $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. Sia C il punto tale che $\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AT}$.

a) Mostra che $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{0}$.

b) Sia M il punto medio del segmento $\overline{AB}$ (definito come nell'esercizio precedente) e sia S il punto tale che $\vec{MS} = \frac{1}{3}\vec{MD}$ (osserva che $\vec{MD}$ è la mediana del triangolo di vertici A, B, D). Mostra che $S = C$. (suggerimento: $\vec{MD} = \vec{MA} + \vec{AD}$)

c) Mostra che le tre mediane del triangolo di vertici A, B, D si incontrano in un (unico) punto.

2.14) Nello spazio euclideo, si chiama *centro di una configurazione* di n punti A_1, A_2, …, A_n un punto C tale che $\vec{CA}_1 + \vec{CA}_2 + \ldots + \vec{CA}_n = \vec{0}$.

Il Teorema di Grassmann afferma che, comunque fissata una configurazione A_1, A_2, …, A_n di n punti, esiste un centro C per tale configurazione.

Dimostra il teorema di Grassmann seguendo le indicazioni proposte.

a) sia C il centro della configurazione A_1, A_2, …, A_n. Mostra che, per ogni punto S risulta $\vec{SA}_1 + \vec{SA}_2 + \ldots + \vec{SA}_n = n\vec{SC}$. (suggerimento: $\vec{CA}_i = \vec{CS} + \vec{SA}_i$) Osserva in particolare che, se il centro esiste, è unico.

b) Siano C e S due punti tali che $\vec{SA}_1 + \vec{SA}_2 + \ldots + \vec{SA}_n = n\vec{SC}$. Allora C è il centro della configurazione A_1, A_2, …, A_n, cioè $\vec{CA}_1 + \vec{CA}_2 + \ldots + \vec{CA}_n = \vec{0}$.

c) Siano dati una configurazione di punti A_1, A_2, …, A_n. Mostra che tale configurazione ammette un centro C. Più precisamente, considera un punto S e denota con T l'unico punto tale che $\vec{SA}_1 + \vec{SA}_2 + \ldots + \vec{SA}_n = \vec{ST}$. Ora considera C tale che $\vec{ST} = n\vec{SC}$ (dividendo il segmento $\overline{ST}$ in n parti uguali). Il punto C è il centro cercato.