Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Primo incontro

1.1) Siano X un insieme e $d : X \times X \to \mathbf{R}$ una funzione assegnata. Mostra che la funzione d è una distanza su X se e solo se valgono le proprietà:

i) per ogni $x, y \in X$: $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

ii) $d(x, y) + d(x, z) \geq d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

1.2) a) Verifica che $d_1 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ è una distanza.

b) Disegna $B_1^{d_1}(\vec{0})$ per $n = 1$ e $n = 2$.

1.3) Stesse domande dell'esercizio precedente, con $d_2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n)$.

1.4) Considera uno spazio metrico (X, d). Controlla se le seguenti funzioni sono distanze su X:

a) fissato $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$, $d_r(x, y) = rd(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

b) $d''(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$, $\forall x, y \in X$.

1.5) Considera lo spazio metrico $\mathbf{R}$ con topologia euclidea. Mostra che, per ogni $a \in \mathbf{R}$, le semirette $(-\infty, a)$ e $(a, +\infty)$ sono aperte.

1.6) (X, d) spazio metrico discreto. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto.

1.7) X insieme finito, d metrica su X. Mostra che ogni sottoinsieme di X è aperto (e dunque d ha gli stessi aperti della metrica discreta).

1.8) (X, d) spazio metrico. Se U, V sono aperti di X, mostra che anche $U \cup V$ e $U \cap V$ sono aperti.

1.9) (X, d), (Y, d_Y) spazi metrici. Posto $d' = \frac{d}{1+d}$, mostra che una funzione $f : X \to (Y, d_Y)$ è continua rispetto a d se e solo se è continua rispetto a d'.