Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2010-11 Primo incontro

1.1) Sia $f : X \to Y$ una applicazione tra spazi topologici. Si considerino $x_0 \in X$ e la sua immagine $y_0 = f(x_0)$. Mostra che f è continua in x_0 se e solo se per ogni intorno W di y_0 in Y, l'antiimmagine $f^{-1}(W)$ è intorso di x_0 in X.

1.2) Sia (X, d) uno spazio metrico. Mostra che la chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S è il sottoinsieme $\{x \in X \mid d(x, S) = 0\}$, ove con $d(x, S)$ si denoti la distanza di x da S, definita da

$$d(x, S) = inf\{d(x, s) | \, s \in S\}.$$

1.3) In uno spazio topologico X, siano assegnati due sottoinsiemi A e B. Mostra che $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

1.4) Sia X uno spazio topologico e si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia euclidea. Siano assegnate due funzioni $f, g : X \to \mathbf{R}$. Mostrare che $fg : X \to \mathbf{R}, x \to f(x)g(x)$ è continua. Sotto l'ipotesi che f che non assuma mai il valore 0, mostrare che $1/f : X \to \mathbf{R}, x \to 1/f(x)$ è continua.

1.5) Determinare un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, top.euclidea)$ definiti da $A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ e $B = \{(x, y)|2x^2 + 6y^2 = 1\}$.

1.6) Determinare un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, top.euclidea)$ definiti da $A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ e $B = \{(x, y)|x = \pm 1\}$.

1.7) Determinare un omeomorfismo tra i due sottospazi di $(\mathbf{R}^2, top.euclidea)$ definiti da $A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ e $B = \{(x, y)|x = \pm 1, -1 < y < 1\}$.

1.8) Mostra che un sottoinsieme di uno spazio topologico è la chiusura di un aperto se e solo se è la chiusura del proprio interno.

1.9) In uno spazio topologico, mostra che un insieme ha frontiera vuota se e solo se è sia aperto che chiuso.

1.10) In un sottoinsieme X sia assegnata una funzione:

$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ S & \mapsto & g(S) \end{array}$$

con le proprietà che

a) $g(\emptyset) = \emptyset$;

b) $S \subset g(S)$;

c) $g(g(S)) = g(S)$;

d) $g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) \cup g(S_2)$

per ogni sottoinsieme S, S_1, S_2 di X. Mostra che esiste una unica topologia su X tale che $g(S)$ coincida con la chiusura di S per ogni sottoinsieme S di X.

1.11) Siano assegnate due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ in un insieme X. Mostrare che risulta essere una topologia anche la famiglia $\mathcal{U}$ dei sottoinsiemi U di X che sono aperti sia in $\mathcal{U}_1$ che in $\mathcal{U}_2$.