

Matrici ortogonali e isometrie

1.1) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1.2) Completa la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}$ in modo che sia ortogonale con determinante 1. Considera l'applicazione lineare f di \mathbf{R}^2 in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

1.3) Considera assegnato un sistema ortonormale di riferimento nel piano euclideo \mathbf{E}^2 . Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - y = 1$.

1.4) Denota con \mathbf{E}^3 lo spazio affine numerico $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}_{\mathbf{R}}^3$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard \mathcal{R} . Determina le equazioni della rotazione ψ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.5) Considera fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3))$ nello spazio euclideo \mathbf{E} . Sia R una rotazione di centro O e sia $\mathcal{R}' = (O, (\mathbf{v}_1' = R(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2' = R(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_3' = R(\mathbf{v}_3)))$. La linea dei nodi è l'intersezione tra $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ e $\langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2' \rangle$ se tale intersezione ha dimensione 1, ed è $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ altrimenti. L'angolo α (con $0 \leq \alpha < 2\pi$) è l'angolo tra \mathbf{v}_1 e la linea dei nodi. L'angolo β (con $0 \leq \beta \leq \pi$) è l'angolo tra \mathbf{v}_3 e \mathbf{v}_3' . L'angolo γ (con $0 \leq \gamma < 2\pi$) è l'angolo tra la linea dei nodi e \mathbf{v}_1' .

Mostra che: $R = R_\gamma \circ R_\beta \circ R_\alpha$ ove R_α sia la rotazione di asse \mathbf{v}_3 e angolo α , ove R_β sia la rotazione di asse la linea dei nodi e angolo β , ove R_γ sia la rotazione di asse \mathbf{v}_3' e angolo γ . Gli angoli α , β e γ sono detti *angoli di Eulero*. Le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono quindi di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3.

1.6) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 reali. Siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sia f l'endomorfismo di V tale che $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_1 - A_2$, $f(A_3) = A_3 + A_4$, $f(A_4) = A_3 + A_4$. Determina la matrice associata a f nella base A_1, A_2, A_3, A_4 (risp. nella base standard).

Cenni di soluzione

- 1.1) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Basta controllare che $A^t A = I$ e $B^t B = I$. In alternativa, si verifica che le colonne di A formano una base ortonormale di \mathbf{R}^3 , e che le colonne di B formano una base ortonormale di \mathbf{R}^2 .

- 1.2) Completa la seguente matrice in modo che sia ortogonale con determinante 1: $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}$.

Considera l'applicazione lineare f di \mathbf{R}^2 in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

La seconda colonna di B deve avere norma 1 e deve essere ortogonale alla prima colonna. Poiché si chiede che il determinante sia 1, la matrice cercata è $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, che è la matrice della rotazione antioraria di angolo $\pi/4$.

- 1.3) Considera assegnato un sistema ortonormale di riferimento nel piano euclideo \mathbf{E}^2 . Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - y = 1$.

- 1.4) Denotiamo con \mathbf{E}^3 lo spazio affine numerico $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}_{\mathbf{R}}^3$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard \mathcal{R} . Determina le equazioni della rotazione ψ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.