2.1) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2.2) Completa la seguente matrice in modo che sia ortogonale con determinante 1: $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}$.

Considera l'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

2.3) Considera assegnato un sistema ortonormale di riferimento nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$. Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - y = 1$.

2.4) Denota con $\mathbf{E}^3$ lo spazio affine numerico $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^3_{\mathbf{R}}$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$. Determina le equazioni della rotazione ψ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.5) Considera fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}))$ nello spazio euclideo $\mathbf{E}$. Sia R una rotazione di centro O e sia $\mathcal{R}' = (O, (\mathbf{v_1}' = R(\mathbf{v_1}), \mathbf{v_2}' = R(\mathbf{v_2}), \mathbf{v_3}' = R(\mathbf{v_3})))$. La linea dei nodi è l'intersezione tra $< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} >$ e $< \mathbf{v_1}', \mathbf{v_2}' >$ se tale intersezione ha dimensione 1, ed è $< \mathbf{v_1} >$ altrimenti. L'angolo α (con $0 \le \alpha < 2\pi$) è l'angolo tra $\mathbf{v_1}$ e la linea dei nodi. L'angolo β (con $0 \le \beta \le \pi$) è l'angolo tra $\mathbf{v_3}$ e $\mathbf{v_3}'$. L'angolo γ (con $0 \le \gamma < 2\pi$) è l'angolo tra la linea dei nodi e $\mathbf{v_1}'$.

Mostra che: $R = R_\gamma \circ R_\beta \circ R_\alpha$ ove R_α sia la rotazione di asse $\mathbf{v_3}$ e angolo α, ove R_β sia la rotazione di asse la linea dei nodi e angolo β, ove R_γ sia la rotazione di asse $\mathbf{v_3}'$ e angolo γ. Gli angoli α, β e γ sono detti *angoli di Eulero*. Le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono quindi di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3.

2.6) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 reali. Siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sia f l'endomorfismo di V tale che $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_1 + A_2$, $f(A_3) = A_3 + A_4$, $f(A_4) = A_3 - A_4$. Determina la matrice associata a f nella base A_1, A_2, A_3, A_4 (risp. nella base standard).