Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2012-13 prima settimana

1.1) Considera $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$.

a) Determina la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7-3i, 11+4i, 16+54i)$. Determina, inoltre, il coniugato di $\vec{v}$.

b) Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (2-i, 3i, 1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (1+i, 4-i, 3-i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

c) Discuti se i vettori $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (4-2i, 10+10i, -5+5i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

d) Discuti se il vettore $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20+15i, 12-9i, 8-6i)$) è multiplo di un vettore reale.

1.2) Determina il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+2i & -1+3i & 3+i \\ 4i & -4+2i & 2+4i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+3i & 3+i \\ 1-i & 5+2i & 2+2i \end{pmatrix}$.

1.3) Siano assegnati uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V e due suoi sottospazi U e W.

a) Dimostra che il complessificato di $U \cap W$ coincide con l'intersezione $U_{\mathbf{C}} \cap W_{\mathbf{C}}$ dei complessificati dei due sottospazi.

b) Se U e W sono in somma diretta, mostra che anche i complessificati $U_{\mathbf{C}}$ e $W_{\mathbf{C}}$ sono in somma diretta, e che il complessificato di $U \oplus W$ è $U_{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}}$.

1.4) Nel piano euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, R = (\vec{i}, \vec{j}))$, con coordinate x, y. Considera il piano complessificato $\mathbf{E}_{\mathbf{C}}$.

a) Fissati i punti $A(3+i, 1-2i)$ e $B(2, -i)$, determina le componenti in $\mathcal{R}$ del vettore $\mathbf{AB}$ dato dalla classe di equipollenza di (A, B).

i) E' un vettore reale?

ii) Determina le coordinate dei punti coniugati $\overline{A}$ e $\overline{B}$ e le componenti del vettore $\overline{\mathbf{AB}}$.

iii) Determina l'equazione cartesiana reale di una retta reale per A, se tale retta esiste.

iv) Determina le coordinate del punto medio di A e $\overline{A}$.

v) Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per A e per B. Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata?

vi) Determina l'equazione del fascio di tutte le rette per B.

b) Determina una coppia ordinata (C, D) di punti immaginari che individua un vettore che ha componenti reali in $\mathcal{R}$.

c) Considera i punti $E(2+i, 3-i)$ e $F(2+3i, 3+2i)$. Determina equazione cartesiana e equazione parametrica della retta per E e per F. Tale retta è reale? Interseca la retta coniugata? È parallela alla retta coniugata?

d) Determina il fascio di rette per $P(2i-1, 5+7i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento. Determinare le rette reali in tale fascio.

e) Determina il fascio di rette parallele al vettore $(5i, 1+i)$, fornendo l'equazione cartesiana di ogni suo elemento.

f) Determina il vettore parallelo alla coniugata della retta r di equazione $2x+(3-i)y+2-3i = 0$. Discuti inoltre se r è reale e quale sia l'intersezione tra r e la sua coniugata.

g) Determina una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $A(2,-7)$. E' possibile determinare una retta che interseca la propria coniugata solo nel punto $B(2+6i, i-1)$?

1.5) Nello spazio euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, R = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$, con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera lo spazio complessificato $\mathbf{E_C}$. Con "discutere la mutua posizione tra due rette r e s" si intende "determinare se la retta r è complanare (e, in tal caso, se è parallela o incidente) o sghemba a s".

a) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

b) Siano $\vec{u} = (1-i, 4+i, i)$, $\vec{w}_1 = (2+i, 3, 1-3i)$, $\vec{w}_2 = (3+i, 3+3i, -2+4i)$. Discuti se il sottospazio $U = Span(\vec{u})$ (risp., $W = Span(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$) è reale.

c) Considera i punti $A(7+i, 1-i, 3)$, $B(3-2i, 5+i, 4i)$, $C(1-i, 6+2i, 1+i)$, $D(-3-4i, 10+8i, -2+5i)$.

i) Discuti se i vettori applicati (A,B) e (C,D) sono equipollenti.

ii) Discuti se i vettori applicati (A,B) e (C',D') sono equipollenti ove $C'(3-i, 2i, 7+3i)$, $D'(-1-4i, 3-i, 1+i)$.

iii) Verifica se (A,B) (rispettivamente, (C,D) e (C',D')) individua un vettore che può essere rappresentato da una coppia di punti di $\mathbf{E}$.

d) Denota con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi di $\mathbf{E_C}$. Siano $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (y_1, y_2, y_3) in $\mathcal{R}$.

i) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ è il cambio di coordinate tra $\mathcal{R}$ e un altro riferimento reale $\mathcal{R}'$, quali sono le compomenti di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}'$?

ii) Posto $\mathbf{u}$ il vettore che ha componenti $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ in $\mathcal{R}$, dimostra che in ogni riferimento reale le componenti di $\mathbf{u}$ sono la somma delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello stesso riferimento. Osserva che in tal modo è possibile definire $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ in modo che la posizione non dipenda dalla scelta del riferimento.

e) Considera un punto P. Mostra che è ben definito il punto $\overline{P}$ che, in un qualsiasi riferimento reale, ha come coordinate il vettore coniugato delle coordinate di P. Mostra, inoltre, che i punti di $\mathbf{E}$ sono esattamente i punti P per i quali $P = \overline{P}$.

f) Determina equazioni cartesiane a coefficienti reali di una retta reale r passante per $P(2, 3-i, 6i)$.

g) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$3ix_1 + x_2 + (5+18i)x_3 - (7+27i) = 0, x_1 + ix_2 + (6+5i)x_3 - 9 - 7i = 0.$$

Determina un vettore direttore della retta r e discutere se la giacitura della retta è reale.

h) Discuti se il piano π di equazione cartesiana $x_1 - x_2 - x_3 + i = 0$ ha punti reali. Sia π il piano di equazione cartesiana $3ix_1 - 5x_2 + (2-i)x_3 + 5 = 0$.

i) Determina una base della giacitura e equazioni parametriche per π.

ii) Determina una descrizione parametrica di $\pi \cap \overline{\pi}$, discutendo se il piano π è reale.

i) Il piano α (rispettivamente, β) ha equazione cartesiana $x_1 - x_2 + ix_3 + 5 = 0$ (risp., $x_1 + ix_2 + ix_3 + 3 = 0$).

i) Usando i minori, determina un vettore direttore per la retta $r = \alpha \cap \beta$.

ii) Determina la posizione relativa tra r e la coniugata $\overline{r}$.

j) Siano fissati il punto $P(3+i, 2-i, -3+2i)$ e i piani α e β di equazione cartesiana, rispettivamente,

$$\alpha : (2i-3)x_1 + ix_2 + x_3 - 4i + 1 = 0, \quad \beta : -3ix_1 + ix_3 + 1 = 0.$$

i) Determina equazioni cartesiane reali di una retta reale s passante per P, se essa esiste.

ii) Determina equazioni cartesiane reali di un piano reale che contiene la retta $r = \alpha \cap \beta$. Se tale piano non esiste, motivare la risposta.

iii) Determina l'equazione del fascio di piani paralleli a α.

iv) Discuti se il piano α è reale e determina un vettore parallelo sia ad α che ad $\overline{\alpha}$.

v) Discuti se la giacitura di β è reale. Qual'è l'intersezione tra β e il coniugato $\overline{\beta}$?

k) Considera fissati i punti $A(2-7i, 5, i+4)$, $B(1, 12-4i, 9i)$, $D(1-7i, -17, i+9)$, $G(14i-1, 26-12i, 25i-8)$, $H(-4+i, 2+11i, 16-3i)$.

i) Determina equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per A e B (e, rispettivamente, della retta s passante per C e D). Discutere la mutua posizione di r e s.

ii) Controlla se i punti A, B, G sono allineati (cioè se esiste una retta che li contiene tutti e tre).

iii) Determina un vettore parallelo alla retta s di equazioni: $3x-(2+i)y+iz = 0, 5ix+4z+i = 0$. Discuti se la giacitura di s è un sottospazio reale dello spazio dei vettori complessi.

iv) Determina equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per $P(1,1,1)$ e parallela a $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$. Qual è l'intersezione tra r e l'immagine $\overline{r}$ di r rispetto al coniugio?

v) Determina una equazione cartesiana ed equazioni parametriche per un piano α passante per A, B, H. Tale piano è unico? Determina inoltre la giacitura del piano α e discutere se tale giacitura è un sottospazio reale dello spazio dei vettori liberi.

vi) Determina le coordinate del vettore libero $\mathbf{v}$ individuato dalla coppia ordinata (A, B). Determinare, inoltre, le coordinate del vettore coniugato $\overline{\mathbf{v}}$. Infine, determinare parte reale e parte immaginaria di $\mathbf{v}$.

vii) Considera l'inclusione naturale ι dell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi dello spazio euclideo nell'insieme $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ dei vettori liberi dello spazio complesso. La coppia ordinata (A, D) rappresenta un vettore appartenente all'immagine di ι?

l) Sia r l'insieme dei punti di coordinate $(1+i+t(-i), 5+t(2-6i), t)$, al variare di $t \in \mathbf{C}$. Descrivere l'immagine di r rispetto al coniugio.

m) Fissati i punti $L(3+i, 2i, 9-3i)$ e $M(3, -1+i, -i)$, determinare le componenti del vettore $\mathbf{LM}$.

n) Controllare se il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1(2+i, 1+4i, -1+3i)$ e quello generato da $\mathbf{v}_2(1+3i, -3+5i, -4+2i)$ sono paralleli. Analoga domanda per $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3(1-i, 4+2i, 7-4i)$.

o) Determinare una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni in $\mathbf{C}^3$ del sistema lineare:

$$\begin{cases} (2-i)x - 3y + z = 0 \\ 3x + (1+i)y + iz = 0 \end{cases}$$

p) Sia r la retta di equazioni cartesiane:

$$x_1 + (2i-3)x_2 + 2ix_3 + i = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 - i = 0.$$

i) Discutere la posizione relativa di r e della sua coniugata.

ii) Discutere se r ha punti reali.

q) Sia r la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 7i\,t, y = 3 - (1+i)\,t, z = 2$.

i) Discutere se la retta r è reale e la mutua posizione con $\overline{r}$.

ii) Discutere l'esistenza di un piano reale contenente r.

r) Sia r la retta di equazioni cartesiane $ix - (5+6i)\,y + z + 4 = 0, (5+5i)\,y - (1+i)\,z = -1-i$. Determinare equazioni cartesiane reali di un piano reale passante per r, se tale piano esiste.