UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 2 a.a. 2012-13 prima settimana

1.1) Verifica se le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.2) Completa la seguente matrice in modo che sia ortogonale con determinante 1:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & * \end{pmatrix}.$$

Considera l'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ in sè, che ha B come matrice associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio. L'applicazione f è la rotazione antioraria di quale angolo?

1.3) (i) Considera assegnato un sistema ortonormale di riferimento nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$. Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - 5y = 1$.

(ii)Determina le equazioni della rotazione $R_{\mathbf{q},\beta} : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di un angolo β rispetto al punto $P(2,3)$. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{P,\beta}$, della retta l di equazione cartesiana $x - 5y = 1$ e della retta per P ortogonale ad l.

1.4) Denotiamo con $\mathbf{E}^3$ lo spazio affine numerico $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^3_{\mathbf{R}}$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$.

i) Determina le equazioni della rotazione ψ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Determina le equazioni della rotazione φ' di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Determina le equazioni della rotazione φ di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.5) Sia fissato un riferimento ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ nello spazio euclideo $\mathbf{E}$. Denota con R^i_α la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ del riferimento. Sia φ una rotazione di centro O.

a) Mostra che sono univocamente individuati gli angoli $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \phi < 2\pi$ tali che

$$\varphi(\mathbf{v}_3) = R^3_\phi \circ R^1_\theta(\mathbf{v}_3) :$$

θ e ϕ sono detti rispettivamente *latitudine* e *longitudine* di $\varphi(\mathbf{v}_3)$.

b) Considera $R' = R^3_\phi \circ R^1_\theta$. Mostra che i vettori $\varphi(\mathbf{v}_1)$ e $R'(\mathbf{v}_1)$ sono entrambi perpendicolari a $R(\mathbf{v}_3)$ e formano un angolo ψ, con $0 \le \psi < 2\pi$.

c) Con le notazioni del punto precedente, mostra che

$$R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi(\mathbf{v}_1) = R(\mathbf{v}_1).$$

d) Concludi che: *Ogni rotazione φ di centro O è della forma*

$$\varphi = R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi$$

dove ϕ, θ e ψ sono angoli tali che

$$0 \leq \psi, \phi < 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

e con R^i_α si denoti la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ del riferimento. In particolare gli angoli ψ, θ e ϕ sono univocamente determinati da φ. Gli angoli ϕ, θ e ψ sono detti angoli *di Eulero.* Le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono quindi di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3.

Nel piano euclideo $\mathbf{E}$, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{R} = \{O, R = (\vec{i}, \vec{j})\}$, con coordinate x, y. Considera il piano complessificato $\mathbf{E_C}$.

1.6) Fissati i punti $A(3+i, 1-2i)$ e $B(2, -i)$, determina le componenti in $\mathcal{R}$ del vettore $\mathbf{AB}$ dato dalla classe di equipollenza di (A, B).

i) E' un vettore reale?

ii) Determina le coordinate dei punti coniugati $\overline{A}$ e $\overline{B}$ e le componenti del vettore $\overline{\mathbf{AB}}$.

iii) Determina l'equazione cartesiana di una retta reale per A, se tale retta esiste.

iv) Determina le coordinate del punto medio di A e $\overline{A}$

1.7) Determina una coppia ordinata (C, D) di punti immaginari che individua un vettore che ha componenti reali in $\mathcal{R}$.

1.8) Considera i punti $A(7+i, 1-i, 3)$, $B(3-2i, 5+i, 4i)$, $C(1-i, 6+2i, 1+i)$, $D(-3-4i, 10+8i, -2+5i)$.

a) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C, D) sono equipollenti.

b) Discuti se i vettori applicati (A, B) e (C', D') sono equipollenti ove $C'(3-i, 2i, 7+3i)$, $D'(-1-4i, 3-i, 1+i)$.

c) Verifica se (A, B) (rispettivamente, (C, D) e (C', D')) individua un vettore che può essere rappresentato da una coppia di punti di $\mathbf{E}$.

1.9) Denota con $\mathcal{V}$ l'insieme dei vettori liberi di $\mathbf{E_C}$. Siano $\mathbf{v}$ un vettore di componenti (x_1, x_2, x_3) e $\mathbf{w}$ un vettore di componenti (y_1, y_2, y_3) in $\mathcal{R}$.

a) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ è il cambio di coordinate tra $\mathcal{R}$ e un altro riferimento reale $\mathcal{R}'$, quali sono le compomenti di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}'$?

b) Posto $\mathbf{u}$ il vettore che ha componenti $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ in $\mathcal{R}$, dimostra che in ogni riferimento reale le componenti di $\mathbf{u}$ sono la somma delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello stesso riferimento. Osserva che in tal modo è possibile definire $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{u}$ in modo che la posizione non dipenda dalla scelta del riferimento.

1.10) Considera un punto P. Mostra che è ben definito il punto $\overline{P}$ che, in un qualsiasi riferimento reale, ha come coordinate il vettore coniugato delle coordinate di P. Mostra, inoltre, che i punti di $\mathbf{E}$ sono esattamente i punti P per i quali $P = \overline{P}$.

Consideriamo $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$.

1.1) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7-3i, 11+4i, 16+54i)$. Determinare, inoltre, il coniugato di $\vec{v}$.

1.2) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (2-i, 3i, 1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (1+i, 4-i, 3-i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

1.3) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (4-2i, 10+10i, -5+5i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

1.4) Discutere se il vettore $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20+15i, 12-9i, 8-6i)$) è multiplo di un vettore reale.

1.5) Determinare il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+2i & -1+3i & 3+i \\ 4i & -4+2i & 2+4i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+3i & 3+i \\ 1-i & 5+2i & 2+2i \end{pmatrix}$.

1.6) Sia assegnato uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V e due suoi sottospazi U e W.

a) Dimostra che il complessificato di $U \cap W$ coincide con l'intersezione $U_{\mathbf{C}} \cap W_{\mathbf{C}}$ dei complessificati dei due sottospazi.

b) Se U e W sono in somma diretta, mostra che anche i complessificati $U_{\mathbf{C}}$ e $W_{\mathbf{C}}$ sono in somma diretta, e che il complessificato di $U \oplus W$ è $U_{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}}$.