Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 2 a.a. 2011-12 prima settimana

Consideriamo $\mathbf{C}^3$ come la complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^3$.

1.1) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del vettore $\vec{v} = (7-3i, 11+4i, 16+54i)$. Determinare, inoltre, il coniugato di $\vec{v}$.

1.2) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (2-i, 3i, 1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (1+i, 4-i, 3-i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

1.3) Discutere se i vettori $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ e $\vec{v}_2 = (4-2i, 10+10i, -5+5i)$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{C}$.

1.4) Discutere se il vettore $\vec{v}_1 = (1-i, 4+2i, -1+2i)$ (risp., $\vec{v}_2 = (-20+15i, 12-9i, 8-6i)$) è multiplo di un vettore reale.

1.5) Determinare il rango delle seguenti matrici complesse $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2+2i & -1+3i & 3+i \\ 4i & -4+2i & 2+4i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+3i & 3+i \\ 1-i & 5+2i & 2+2i \end{pmatrix}$.

1.6) Sia assegnato uno spazio vettoriale reale di dimensione finita V e due suoi sottospazi U e W.

a) Dimostra che il complessificato di $U \cap W$ coincide con l'intersezione $U_{\mathbf{C}} \cap W_{\mathbf{C}}$ dei complessificati dei due sottospazi.

b) Se U e W sono in somma diretta, mostra che anche i complessificati $U_{\mathbf{C}}$ e $W_{\mathbf{C}}$ sono in somma diretta, e che il complessificato di $U \oplus W$ è $U_{\mathbf{C}} \oplus W_{\mathbf{C}}$.

Alcuni esercizi di ripasso sulle trasformazioni lineari.

2.1) Sia $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3)$.

a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di $\mathbf{R}^4$ e alla base canonica $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ di $\mathbf{R}^3$.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im T.

c) Determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker T.

2.2) Sia $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $H(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, ove con $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ si denoti la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare la matrice di H rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im H.

c) Determinare la dimensione ed una base di Ker H. L'applicazione H è iniettiva?

d) Determinare la matrice (rispetto alle basi canoniche in dominio e codominio) della composizione $H \circ T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, ove T sia l'applicazione lineare definita nell'esercizio precedente.

2.3) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $f(\mathbf{v}_1) = 3\,\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, , ove con $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si denoti una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$.

Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

Nel piano affine **E**, sia fissato un sistema di riferimento $R = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$, con coordinate x, y.

3.1) Determinare una equazione cartesiana per la retta passante per i punti A(2,1) e $B(-3,4)$.

3.2) Determinare un vettore parallelo alla retta r di equazione cartesiana $3x-4y+4=0$. Determinare, inoltre, la distanza tra r e il punto $P(-2,1)$.

3.3) Si determini il cambio di riferimento tra le coordinate x, y e le coordinate x'', y'' relative al riferimento $R'' = \{O'', (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$, con $O''(-6,12)$. Esistono punti che hanno le stesse coordinate nei due sistemi di riferimento?

3.4) Si determini il cambio di riferimento tra le coordinate x, y e le coordinate x', y' relative al riferimento $R' = \{O, (\vec{v}_1', \vec{v}_2')\}$, con $\vec{v}_1' = -4\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$, $\vec{v}_2' = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$.

3.5) Si considerino il punto $A(3,7)$ e la retta r di equazione cartesiana $3x+y-2=0$. Dato il cambio di riferimento $x' = 2x+y, y' = -x-y$, determinare le coordinate di A e l'equazione di r nel nuovo riferimento. Determinare inoltre le coordinate di tutti i punti (se esistono) che hanno le stesse coordinate nel vecchio e nel nuovo riferimento.