Definizione 0.1 Dati due insiemi non vuoti A e B , il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) , al variare di a in A e di b in B .

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Definizione 0.2 Dati due insiemi non vuoti A e B , il grafico di una corrispondenza tra A e B è un sottoinsieme C di $A \times B$. Una corrispondenza di un insieme in sé prende il nome di relazione.

Se C è il grafico di una corrispondenza R di un insieme non vuoto A in un insieme non vuoto B , e $x, y \in A$, scriviamo che xRy se e solo se $(x, y) \in C$. In tal caso, diciamo che y è in corrispondenza con x (o che y è corrispondente di x nella corrispondenza R , o che y è nella corrispondenza R con x). Indichiamo con $R(x)$ l'insieme degli elementi di A che sono corrispondenti di x nella corrispondenza R : l'insieme $R(x)$ è detto immagine di x nella corrispondenza R . Per indicare che esiste una corrispondenza R dell'insieme A nell'insieme B , scriviamo

$$R : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto R(x).$$

Se C è il grafico di una relazione R in un insieme non vuoto A , e $x, y \in A$, scriviamo che xRy se e solo se $(x, y) \in C$. In tal caso, diciamo che y è in relazione con x .

Se R è una corrispondenza di un insieme non vuoto A in un insieme non vuoto B , resta definita in modo naturale una corrispondenza di B in A , detta corrispondenza inversa di R ; tale corrispondenza viene denotata con R^{-1} ed è definita ponendo, per ogni $y \in B$, $R^{-1}(y)$ come il sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi $x \in A$ tali che xRy :

$$R^{-1}(y) = \{x \in A | xRy\}.$$

Se B_1 è un sottoinsieme di B , si dice controimmagine (o immagine inversa) di B_1 mediante R (o rispetto a R) il sottoinsieme $R^{-1}(B_1)$ di A . Una relazione si dice

riflessiva se xRx per ogni $x \in A$,

simmetrica se (per ogni $x, y \in A$) xRy implica yRx

transitiva se (per ogni $x, y, z \in A$) xRy e yRz implica che xRz .

Una relazione su un insieme non vuoto A si dice *relazione di equivalenza* se è riflessiva, simmetrica e transitiva. In tal caso, per ogni $x \in A$, resta definita la *classe di equivalenza* di x , che è l'insieme di tutti gli elementi $y \in A$ tali che xRy . In generale, un sottoinsieme di A è una classe di equivalenza se è la classe di equivalenza di un opportuno elemento. Si verifica che le classi di equivalenza sono non vuote e la loro unione è A . Inoltre, due classi di equivalenza si intersecano se e solo se coincidono. L'insieme delle classi di equivalenza è detto *insieme quoziente* di A rispetto alla relazione (o, modulo la relazione).

1.1) Calcola le somme e completa inserendo il numero corretto in $\mathbf{R}^{\dots}$:

$$(2, 0, -2, 7) + (3, 1, 5, 2) = \dots \quad \text{in } \mathbf{R}^{\dots}$$

$$(1, 1, 2, -3, 0) + (-1, 1, 3, -2, 1) = \dots \quad \text{in } \mathbf{R}^{\dots}$$

1.2) Valuta le espressioni:

$$-3(2, 0, -2, 7) + 4(3, 1, 5, 2) = \dots$$

$$3(1, 1, 2, -3, 0) - 2(-1, 1, 3, -2, 1) = \dots$$

1.3) Considera gli insiemi $A = \{1, 3, 7\}$ e $B = \{a, b\}$.

a) Elenca gli elementi di $A \times B$

b) Elenca gli elementi di $B \times A$.

c) Descrivi una funzione biettiva $f : A \times B \rightarrow B \times A$ e una funzione non biettiva $g : A \times B \rightarrow B \times A$ la cui immagine sia composta da esattamente 3 elementi.

1.4) Se l'insieme A è formato da n elementi e B da m elementi, quanti elementi ha $A \times B$?

1.5) Considera due sottoinsiemi A_1 e A_2 di un insieme A . Completa le definizioni:

$$A_1 \cup A_2 = \{ \dots$$

$$A_1 \cap A_2 = \{ \dots$$

$$A_1 \setminus A_2 = \{ \dots$$

1.6) Considera una funzione $f : A \rightarrow B$ tra due insiemi A e B . Considera inoltre due sottoinsiemi A_1 e A_2 di A e due sottoinsiemi B_1 e B_2 di B . Dimostra che

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ e trova un esempio in cui $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$

c) se f è iniettiva, allora $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

d) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ e trova un esempio in cui $A_1 \neq f^{-1}(f(A_1))$.

e) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$ e trova un esempio in cui $B_1 \neq f(f^{-1}(B_1))$.

1.7) Considera l'insieme $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 8, 11\}$. Considera la relazione R su A data da xRy se e solo se $x \geq y$ ($x, y \in A$).

(i) Determina il grafico della relazione R .

(ii) Determina l'immagine, tramite R del sottoinsieme $Z = \{2, 11\}$.

(iii) Elenca gli elementi nell'antiimmagine (o controimmagine) di 1 tramite R .

(iv) Descrivi la relazione inversa R^{-1} di R .

1.8) Considera l'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ dei numeri naturali. Descrivi una relazione in $\mathbf{N}$ che abbia una delle proprietà di essere riflessiva, simmetrica, transitiva, ma non le altre due. Costruisci poi una relazione che abbia due delle proprietà di essere riflessiva, simmetrica, transitiva, ma non la rimanente.

1.9) Considera l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e una relazione R su A il cui grafico contiene $(2, 3)$ e $(4, 5)$. Completa il grafico di R con il minimo numero di coppie in modo tale che la relazione R sia una relazione di equivalenza. Determina, infine, l'insieme quoziente di A modulo R .

1.10) Nello spazio euclideo, denota con $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette. Due rette r e r' si dicono incidenti se $r \cap r' \neq \emptyset$. Consideriamo la relazione di *incidenza* R in $\mathcal{R}$ così definita: rRr' se e solo se r e r' sono incidenti. La relazione R è simmetrica? è riflessiva? è transitiva?

1.11) Nello spazio euclideo, denota con $\mathcal{P}$ l'insieme dei piani. Due piani α e α' si dicono paralleli se $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$. Consideriamo la relazione di *parallelismo* S in $\mathcal{P}$ così definita: $\alpha S \alpha'$ se e solo se α e α' sono incidenti. Mostra che S è una relazione di equivalenza. Le corrispondenti classi di equivalenza prendono il nome di "giaciture".

1.12) Dati tre insiemi A, B, C . Mostra che:

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(ii) $A \cup B = A$ se e solo se $B \subseteq A$.

(iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(iv) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.