14.1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $f(\mathbf{v}_1) = 3\,\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3$, $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, , ove con $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si denoti una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Determina la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ in dominio e codominio.

b) Determina le componenti in $\mathcal{B}$ di un vettore $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_3$.

14.2) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, 6x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$$

a) Determina una base per ciascuno dei sottospazi $Ker\, f$ e $Im\, f$.

b) Determina una base e la dimensione dell'intersezione $Ker\, f \cap Im\, f$.

c) Determina una base e la dimensione di $Ker\,(f \circ f)$.

14.3) Considera una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di uno spazio vettoriale V e una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ una base di uno spazio vettoriale W sullo stesso campo. Considera l'applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in Ker(f)$.

a) Determina le coordinate (y_1, y_2) di $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3)$, rispetto alla base assegnata del codominio. Determina, inoltre, la matrice di f nelle basi assegnate.

b) Determina il nucleo di f.

14.4) Sia $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $H(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, ove con $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ si denoti la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare la matrice di H rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

b) Determinare la dimensione ed una base di Im H.

c) Determinare la dimensione ed una base di Ker H. L'applicazione H è iniettiva?

14.5) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'unica applicazione lineare tale che $f(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$, $f(\mathbf{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$, $f(\mathbf{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$. Sia Z il sottospazio generato da $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$.

a) Mostrare che $f(Z) \subseteq Z$.

b) Determinare la matrice $\mathbf{B}$ di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice $\mathbf{B}$? Osservare che il riferimento $\mathcal{B}$ è completamento di un riferimento di Z.

14.6) Determinare le matrici del cambio di base da E a R, da E a R', da R a R' in $\mathbf{R}^2$, dove E sia il riferimento canonico, $R = ((1, 4), (2, 1))$, $R' = ((5, 1), (1, 7))$.

14.7) Mostra che, se $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali (di dimensione finita), esistono una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W tale che la matrice A di f rispetto alle basi indicate sia della forma $\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, ove con $\mathbf{I}$ si denoti la matrice identica di ordine uguale alla dimensione di V, e con $\mathbf{0}$ una matrice con tutti i coefficienti nulli.

14.8) Sia Z il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$. Determinare una applicazione lineare di V in sè tale che $Z = Imf = Kerf$.

14.9) In un dato riferimento ortonormale cartesiano nel piano euclideo, considera la retta r d di equazione cartesiana $3x + 2y + 4 = 0$. Scrivi equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per il punto $P(0, 2)$ e con giacitura ortogonale alla giacitura di r.

14.10) In un dato riferimento ortonormale cartesiano nello spazio euclideo, considera il piano α di equazione cartesiana $x + 3y - z + 4 = 0$.

a) Determina la dimensione ed una base del sottospazio ortoonale alla giacitura di α.

b) Nella giacitura di α, determina un vettore non nullo ortogonale al vettore di componenti $(1, 0, 1)$.