13.1) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - X_0X_1 + 5X_0X_2 - 5X_1X_2 = 0$$

b) Discuti se qualcuno dei punti fondamentali del riferimento appartiene a Γ. Determina il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determina l'equazione omogenea della retta polare del punto $K[1,0,1]$ e discuti se essa contiene i punti doppi di Γ. Determina inoltre l'equazione omogenea della retta polare del punto $P_2[0,1,0]$ e confrontala con le componenti di Γ.

d) Determina l'equazione canonica proiettiva di Γ.

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\begin{pmatrix} 1 & -(1/2) & 5/2 \\ -(1/2) & 0 & -(5/2) \\ 5/2 & -(5/2) & 0 \end{pmatrix}$ oppure la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 (che è, per definizione, il rango della conica). Sappiamo dunque che la conica è unione di due rette distinte che si intersecano nell'unico punto singolare della conica.

b) Un punto fondamentale appartiene alla conica se e solo se il corrispondente elemento sulla diagonale principale di $\mathbf{A}$ è nullo. Da questa osservazione, o da un controllo diretto, si verifica che $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ sono i punti fondamentali che appartengono a Γ.

c) Per quanto visto nel punto a), Γ ha un unico punto doppio D, le cui coordinate omogenee sono soluzione non nulla di $\mathbf{AX} = \vec{0}$. Si ricava $D[5,5,-1]$. Entrambe le componenti di Γ passano per D. Intersecando Γ con la retta $X_0 = 0$ si trovano i due punti fondamentale $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ (che già conoscevamo). Le componenti di Γ sono la retta $X_0 + 5X_2 = 0$ (passante per D e per $[0,1,0]$) e la retta $X_0 - X_1 = 0$ (passante per D e per $[0,0,1]$).

d) La polare di K ha equazione $(1\ 0\ 1)\mathbf{A}\vec{X} = 7X_0 - 6X_1 + 5X_2 = 0$. Essa passa per il punto doppio D, perchè le polari passano sempre per i punti doppi.

e) La polare di $P_2[0,1,0]$ ha equazione $(0\ 1\ 0)\mathbf{A}\vec{X} = -X_0 - 5X_2 = 0$ è una delle componenti di Γ. Si osservi che la polare r_P di un punto semplice P di una conica riducibile è sempre la componente che contiene P; infatti, la polare r_P contiene P perchè P appartiene alla conica. Inoltre, per quanto osservato nel punto precedente, r_P deve contenere anche D: se r_P non fosse contenuta nella conica, avrebbe con essa molteplicità di intersezione 2 in D e 2 in P (assurdo).

f) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

13.2) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$2X_0X_1 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$$

b) Verificare che il punto $P_1[1,0,0]$ appartiene a Γ. È un punto semplice o doppio? Determinare l'equazione omogenea della tangente a Γ in P.

c) Determinare l'equazione omogenea della retta polare di $Q[1,2,1]$.

d) Determinare le rette passanti per il punto Q che sono tangenti a Γ nei punti di intersezione.

Soluzione a) La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il punto P_1 appartiene a Γ ed è un punto semplice. La sua tangente coincide con la polare $X_1 - 2X_2 = 0$.

b) La polare r_Q di Q ha equazione omogenea $(1\ 2\ 1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 2X_1 - 2X_2 = 0$, cioè $X_1 - X_2 = 0$.

c) Osserviamo che il punto Q non appartiene alla conica, e dunque esisteranno due rette per Q tangenti alla conica. Intersecando la polare r_Q con Γ si trovano i punti $P_1[1,0,0]$ e $U[1,1,1]$. Le tangenti cercate sono la polare di P_1 (cioè la retta che passa per P_1 e Q, di equazione $-X_1 + 2X_2 = 0$) e la polare di U rispetto a Γ (cioè la retta che passa per U e Q, di equazione $X_0 - X_2 = 0$) .

13.3) Sia Γ una conica di $\mathbf{P}^2$ tale che il punto $P_1[1,0,0]$ e il punto $P_2[0,1,0]$ non appartengono a Γ, e che P_2 appartiene alla polare di P_1 rispetto a Γ.

a) Che informazioni abbiamo sulla matrice associata a Γ?

b) E se imponiamo che anche $P_3[0,0,1]$ stia sulla polare di P_1?

Soluzione: a) sarà

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

con $ac \neq 0$.

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & e \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

con $ac \neq 0$.

13.4) Si consideri la quadrica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

a) Determinare la matrice $\mathbf{A}$ della quadrica, discutere se Γ è composta da punti distinti e determinare le coordinate omogenee dei punti di Γ.

b) Osservare che, per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, l'equazione $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ definisce un punto P' in $\mathbf{P}^1$, detto punto polare di P o punto coniugato di P rispetto a Γ. Determinare le coordinate di P'.

d) Se $P \in \Gamma$, chi è il coniugato P'?

e) Indicati con S, T i punti della quadrica, calcolare il birapporto $(STPP')$ quando $P[1,0]$ (che non appartiene alla quadrica).

Soluzione: a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; poichè la matrice ha rango 2, la quadrica è composta da due punti distinti, $S = [1, i]$ e $T = [1, -i]$.

c) $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = p_0X_0 + p_1X_1 = 0$. Si ricavano le coordinate omogenee del punto $P'[p_1, -p_0]$.

d) $S' = [i, -1] = S$, $T' = [-i, -1] = T$.

e) $(STPP') = [|SP|\ |TP'|, |SP'|\ |TP|] =$

$$= [det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ i & p_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ -i & -p_0 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ i & -p_0 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ -i & p_1 \end{pmatrix}] =$$

$$= [(p_1 - ip_0)(-p_0 + ip_1), (-p_0 - ip_1)(p_1 + ip_0)] = [1, -1].$$

13.5) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

b) Determinare il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determinare l'equazione canonica proiettiva di Γ.

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 (che è, per definizione, il rango della conica). Sappiamo dunque che la conica è composta da una retta di punti singolari, contata con molteplicità 2.

b) Per quanto visto nel punto precedente, i punti doppi di Γ formano una retta di equazione $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, cioè $X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$, che è l'unica componente di Γ.

c) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

13.6) Considera la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.

a) Determina il rango della conica e l'equazione della retta polare di $T[1, 1, 1]$.

b) Determina le coordinate omogenee del polo Q della retta r di equazione $X_1 = 0$. Determina inoltre le coordinate omogenee dei punti che compongono la quadrica intersezione Γ_r di Γ con r.

c) Determina l'equazione omogenea della retta s' che sia coniugata, rispetto all'involuzione indotta sul fascio di rette per Q dalla quadrica intersezione Γ_r, della retta di equazione $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e passante per Q.

Test 1 *Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee* $[x_0, x_1, x_2]$ *e la conica* Γ *di equazione* $x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$.

VF (a) la conica Γ *contiene la retta di equazione* $x_0 + x_1 = 0$*;*

VF (b) la conica Γ *ha rango 2;*

VF (c) il punto $P[1, 1, -1]$ *è doppio per* Γ.

Test 2 *Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee* $[x_0, x_1, x_2]$ *e la conica* Γ *di equazione* $2x_0^2 + 3x_0x_1 - 3x_0x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$.

VF (a) la conica Γ *contiene due rette distinte;*

VF (b) la conica Γ *contiene la retta di equazione* $-x_0 + x_1 - x_2 = 0$*;*

VF (c) il punto $P[0, 1, 1]$ *è doppio per* Γ.