13.1) Individua l'omogeneizzazione del polinomio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2 + 3 = 0$.

13.2) a) Considera una matrice reale M 3×3 di rango 1. Mostra che esistono vettori non nulli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$.

b) Siano $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$ e $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$. Dimostra che la matrice M è simmetrica di rango 1.

c) Sia M una matrice reale 3×3 simmetrica di rango 1. È vero che esiste un vettore non nullo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$? Mostra che vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$ esiste se e solo se la matrice M (simmetrica di rango 1 per ipotesi) è semidefinita positiva, cioè $\mathbf{x}^t\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

13.3) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - X_0X_1 + 5X_0X_2 - 5X_1X_2 = 0$$

b) Discuti se qualcuno dei punti fondamentali del riferimento appartiene a Γ. Determina il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determina l'equazione omogenea della retta polare del punto $K[1, 0, 1]$ e discuti se essa contiene i punti doppi di Γ. Determina inoltre l'equazione omogenea della retta polare del punto $P_2[0, 1, 0]$ e confrontala con le componenti di Γ.

d) Determina l'equazione canonica proiettiva di Γ.

13.4) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$2X_0X_1 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$$

b) Verificare che il punto $P_1[1, 0, 0]$ appartiene a Γ. È un punto semplice o doppio? Determinare l'equazione omogenea della tangente a Γ in P.

c) Determinare l'equazione omogenea della retta polare di $Q[1, 2, 1]$.

d) Determinare le rette passanti per il punto Q che sono tangenti a Γ nei punti di intersezione.

13.5) Sia Γ una conica di $\mathbf{P}^2$ tale che il punto $P_1[1, 0, 0]$ e il punto $P_2[0, 1, 0]$ non appartengono a Γ, e che P_2 appartiene alla polare di P_1 rispetto a Γ.

a) Che informazioni abbiamo sulla matrice associata a Γ?

b) E se imponiamo che anche $P_3[0, 0, 1]$ stia sulla polare di P_1?

13.6) Si consideri la quadrica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

a) Determinare la matrice $\mathbf{A}$ della quadrica, discutere se Γ è composta da punti distinti e determinare le coordinate omogenee dei punti di Γ.

b) Osservare che, per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, l'equazione $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ definisce un punto P' in $\mathbf{P}^1$, detto punto polare di P o punto coniugato di P rispetto a Γ. Determinare le coordinate di P'.

d) Se $P \in \Gamma$, chi é il coniugato P'?

e) Indicati con S, T i punti della quadrica, calcolare il birapporto $(STPP')$ quando $P[1, 0]$ (che non appartiene alla quadrica).

13.7) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

b) Determinare il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determinare l'equazione canonica proiettiva di Γ.

13.8) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.

a) Determina il rango della conica e l'equazione della retta polare di $T[1,1,1]$.

b) Determina le coordinate omogenee del polo Q della retta r di equazione $X_1 = 0$. Determina inoltre le coordinate omogenee dei punti che compongono la quadrica intersezione Γ_r di Γ con r.

c) Determina l'equazione omogenea della retta s' che sia coniugata, rispetto all'involuzione indotta sul fascio di rette per Q dalla quadrica intersezione Γ_r, della retta di equazione $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e passante per Q.

13.9) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ di equazione $15X_0^2 + 16X_0X_1 - 7X_1^2 = 0$.

a) Determina i punti della quadrica

b) Per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, determina le coordinate del punto coniugato P'.

c) Indicati con B_0, B_1 i punti della quadrica, calcola il birapporto (B_0B_1PP') quando $P[1,0]$.

13.10) Sia $\vec{\Gamma} \subset \mathbf{P}^2$ la conica di equazione:

$$2X_1^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 = 0.$$

Determina l'equazione proiettiva canonica di $\vec{\Gamma}$ come conica reale.

13.11) Nel piano affine reale complessificato, sia γ la conica affine di equazione : $1 + x^2 + 2y^2 + 2xy = 0$.

a) Discuti se γ è una conica a centro e, in caso positivo, determina le coordinate del centro C.

b) Determina l'equazione canonica affine di γ.

c) Determina le coordinate del polo Q della retta $y = 0$. Determina inoltre i punti di tangenza delle rette per Q tangenti a γ.

d) Determina la direzione coniugata alla direzione $(3,1)$.

13.12) Nel piano affine reale complessificato, sia γ la conica affine di equazione : $2y^2 + 2xy + 1 = 0$.

a) Discuti se γ è una conica a centro e, in caso positivo, determina le coordinate del centro C.

b) Determina l'equazione canonica affine di γ.

c) Determina l'equazione di ciascuno degli asintoti di γ.

d) Determina, se esistono, le rette del fascio $x = k$ che sono tangenti a γ.

e) Discuti se la retta $3x + 11y + 3 = 0$ è un diametro.

Test 1 *Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee* $[x_0, x_1, x_2]$ *e la conica* Γ *di equazione* $x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ *contiene la retta di equazione* $x_0 + x_1 = 0$*;*

V F (b) la conica Γ *ha rango 2;*

V F (c) il punto $P[1,1,-1]$ *è doppio per* Γ.

Test 2 *Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee* $[x_0, x_1, x_2]$ *e la conica* Γ *di equazione* $2x_0^2 + 3x_0x_1 - 3x_0x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$.

V F (a) la conica Γ *contiene due rette distinte;*

V F (b) la conica Γ *contiene la retta di equazione* $-x_0 + x_1 - x_2 = 0$*;*

V F (c) il punto $P[0,1,1]$ *è doppio per* Γ.