13.1) Considera l'applicazione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definita da $f(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + 2z)$.

i) Dimostra che f è una applicazione lineare.

ii) Determina la dimensione ed una base di Im f e Ker f rispettivamente.

iii) Determina la dimensione e una base dell'immagine, tramite f, del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito da $x + y - 2z = 0$.

13.2) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x+3z, 2x+y+z, 3x+y+4z)$.

i) Determina una matrice A tale che $f(x, y, z) = A(x, y, z)^t$.

ii) Determina la dimensione ed una base di ker f e Im f.

13.3) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita estendendo per linearità le posizioni $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$, $f(\vec{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$.

a) Determina l'espressione di $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

b) Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$. Mostra che $f(W) \subset W$.

13.4) Denota con $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$ e con $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ quella di $\mathbf{R}^3$.

a) Determina, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tale che $g(< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >) =< \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3 >$, $g(< \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 >) =< 2\mathbf{E}_1 + 4\mathbf{E}_3 >$.

b) Determina, se esiste, una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tale che Im $f =< \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_3 >$, Ker $f =< \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 >$.

13.5) Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita.

a) se Z è un sottospazio di W, è vero che l'antiimmagine $f^{-1}(Z)$ è un sottospazio di V?

b) è vero che l'antiimmagine tramite f di un qualunque sottospazio di W contiene Ker f?

13.6) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$, considera i vettori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{v}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Dire se esiste (e, in caso positivo determinare) una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(\vec{e}_1) = (1, 4)$, $f(\vec{e}_2) = (1, -1)$, $f(\vec{v}_1) = (3, 3)$.

13.7) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^2$ (rappresentato come il piano cartesiano), considera le applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definite (rispettivamente) da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) Disegna le immagini $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, $f(\frac{1}{2}\vec{e}_1)$, $\frac{1}{2}\vec{e}_2)$, $f(\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2)$.

b) Disegna le immagini $g(\vec{e}_1)$, $g(\vec{e}_2)$, $g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

c) Individua una applicazione lineare $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che l'immagine del quadrato

$$Q = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

sia il parallelogramma di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$,$(1, 1)$. .