Spazio vettoriale quoziente

12.1) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$. Considera lo spazio vettoriale quoziente V/W.

a) Esibisci 5 rappresentanti distinti per la classe $[(2,1,0,3)]$.

b) Controlla e discuti le seguenti uguaglianze: $[\mathbf{0}] = [(-6,1,-5,1)]$; $[\mathbf{0}] = [(2,5,0,1)]$; $[(2,1,0,0)] = [(5,-1,2,3)]$; $[(2,-1,1,-1)] = [(5,4,-2,4)]$.

c) Determina la dimensione e una base di V/W.

12.2) Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio. Considera due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ in V. Mostra che le due classi $[\mathbf{v}_1]$ e $[\mathbf{v}_2]$ sono linearmente indipendenti in V/W se e solo se Span $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e W sono in somma diretta.

12.3) Sia W il sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^4$ generato $\vec{v}_1 = (3,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,-1,1)$.

a) Completa $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ad riferimento $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.

b) Determina la dimensione e una base dello spazio vettoriale quoziente V/W.

12.4) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1, 2x_1 - x_4)$ e denota $W = Ker\, f$. Considera inoltre il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0,0)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,0,2,0)$.

a) U e $W = Kerf$ sono in somma diretta?

b) Discuti se $[\mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_2]$ in $\mathbf{R}^4/W$.

c) Mostra che $\overline{\mathcal{B}} = \{[\mathbf{e_1}], [\mathbf{e_4}]\}$ è una base di $\mathbf{R}^4/W$.

d) Considera l'applicazione naturale $\overline{f} : \mathbf{R}^4/W \to \mathbf{R}^2$ che fattorizza f. Determina la matrice associata a $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.

12.5) Sia V uno spazio vettoriale e siano $f, g \in End(V)$. Mostra che $Ker\, f \subseteq Ker\,(g \circ f)$ e che l'endomorfismo $g \circ f$ fattorizza rispetto alla proiezione canonica $V \to V/Kerf$.

12.6) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_4 + x_5)$. Denota con $\pi : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5/Kerf$ la proiezione canonica e con $h : V/Ker\, f \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione tale che $f = h \circ \pi$, indotta dal primo teorema fondamentale di omomorfismo.

a) Determina una base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^5/Kerf$.

b) Determina la matrice di π rispetto alla base canonica in $\mathbf{R}^5$ e alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$.

c) Determina la matrice di h rispetto alla base scelta $\overline{\mathcal{B}}$ in $V/Ker\, f$ la matrice di h.

d) Discuti se l'applicazione $g : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$, definita da $g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_4 - x_5$ fattorizza attraverso π.

e) Considera il sottospazio U' di $\mathbf{R}^5$ generato da $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,-1,1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,-2,-1,-4,0)$. Determina una base e la dimensione di $U = \pi(U')$. Determina inoltre una base di $\pi^{-1}(U)$.

f) Discuti se la posizione $\overline{f} : \mathbf{R}^5/Ker\, f \to \mathbf{R}^2/ < (1,0) >$, $\overline{f}[v] = [f(v)]$, definisce una applicazione lineare.

12.7) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita, e sia W un sottospazio f-stabile di V. Considera la posizione $\overline{f} : V/W \to V/W$, $\overline{f}([v]) = [f(v)]$.

a) Mostra che $\overline{f}$ è ben posta e definisce un endomorfismo di V/W.

b) Sia $\overline{\mathcal{B}}$ la base di V/W indotta da una base $\mathcal{B}$ di V ottenuta come completamento di una base di W. Descrivi la relazione tra $M_{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{f})$.

12.8) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to: \mathbf{R}^4$ definita da $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$, $f(\vec{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$, $f(\vec{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$. Sia W il sottospazio generato da $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$.

a) Mostrare che $f(W) \subset W$.

b) Determinare la matrice B di f nel riferimento $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$.

c) Che particolarità ha la matrice B? Osservare che il riferimento $\mathcal{B}$ è completamento di un riferimento di W.

d) Considera l'applicazione lineare definita da $\overline{f} : \mathbf{R}^4/W \to \mathbf{R}^4/W$, $\overline{f}([v]) = [f(v)]$. Determina la matrice di $\overline{f}$ rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^4/W$ indotta da una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^4$.

12.9) Sia $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ una decomposizione fissata in somma diretta di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ di dimensione finita, con $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sottospazi non banali.

a) Mostra che ogni una decomposizione in somma diretta $\mathbf{V} = \mathbf{U}' \oplus \mathbf{W}$ (con $\mathbf{U}'$ sottospazio di $\mathbf{V}$) definisce una applicazione lineare $f_{\mathbf{W},\mathbf{U}'} : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$.

b) Mostra che ogni applicazione lineare $f : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}$ definisce una decomposizione in somma diretta $\mathbf{V} = \mathbf{U}' \oplus \mathbf{W}$ (per un opportuno sottospazio $\mathbf{U}'$ di $\mathbf{V}$), in modo tale che questa costruzione sia inversa di quella definita al punto precedente.

12.10) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rappresentata, in base canonica, dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -9 & 5 & 3 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Mostra che 2 è un autovalore per f e determina la dimensione e una base dell'autospazio V_2 di autovalore 2.

b) Mostra che -1 è un autovalore per f e determina la dimensione e una base dell'autospazio V_{-1} di autovalore -1.

c) Mostra che $\mathbf{R}^3 = V_2 \oplus V_{-1}$ e determina la matrice di f in una base di $\mathbf{R}^3$ formata dall'unione di una base di V_2 e una base di V_{-1}.

d) Determina la matrice di $\overline{f} : \mathbf{R}^3/V_{-1} \to \mathbf{R}^3/V_{-1}$, $\overline{f}([v]) = [f(v)]$, rispetto alla base $\overline{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{R}^3/V_{-1}$ indotta dalla base di $\mathbf{R}^3$ individuata nel punto precedente.

12.11) Dimostra che, se $f : V \to V$ è diagonalizzabile, e W è un sottospazio f-stabile, allora è diagonalizzabile anche l'applicazione $\overline{f} : V/W \to V/W$, definita da $\overline{f}([v]) = [f(v)]$.