12.1) Mostra che una matrice quadrata A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori, ma, in generale, autovettori distinti.

12.2) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ove $\mathbf{A}$ è la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina il polinomio caratteristico di f e verifica che f è triangolabile.

b) Verifica che f è nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$) determinando esplicitamente il più piccolo indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$.

c) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e una base per $Imf \cap Kerf$.

12.3) a) Determina gli autovalori di A, attraverso la traccia e il determinante, ove $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Determina una matrice diagonale Δ e una matrice invertibile C tale che $A = C\Delta C^{-1}$.

c) Calcola A^2 e verifica che A soddisfa il suo polinomio caratteristico.

d) Calcola una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 generato dalle potenze di A.

e) Calcola A^4 e le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$ determinata al punto precedente.

12.4) Considera un endomorfismo non nullo f di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Mostra che f è nilpotente se e solo se lo spettro di f è $\{0\}$.

12.5) Mostra che, se f è un endomorfismo triangolabile, esiste un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare inferiore.

12.6) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che f è triangolabile.

b) Determina una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 e il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 nella forma canonica di Jordan.

c) Determina un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare superiore.

12.7) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e la forma canonica di Jordan di f.

12.8) Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V f.g., di cui $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sia una base.

a) Dimostra che l'insieme $I(f)$ dei polinomi $p(\lambda) \in K[\lambda]$ tali che $p(f)$ è l'endomorfismo nullo, è un ideale principale non nullo di $K[\lambda]$. Il generatore monico di $I(f)$ (caratterizzato dal fatto di essere il polinomio monico non nullo di grado mimimo in $I(f)$) è detto il *polinomio minimo* di f e viene denotato con $m_f(\lambda)$.

b) Dimostra che le radici del polinomio minimo sono elementi dello spettro.

c) Dimostra che, se f è diagonalizzabile, il polinomio minimo ha solo radici semplici e l'insieme delle sue radici coincide con l'insieme degli autovalori di f (cioè, in questo caso, con lo spettro).

d)Dimostra che il polinomio minimo può essere calcolato come segue.

d_1) Considera il numero minimo h_1 tra gli indici $t > 0$ per i quali i vettori $\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_1)$, $\ldots$, $f^t(\mathbf{v}_1)$ siano linearmente dipendenti. Sia $m_1(\lambda)$ un polinomio monico di grado h_1 tale che l'endomorfismo $m_1(f)$ verifichi $m_1(f)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$ (quanti ce ne sono?). In modo analogo, definisci h_i e $m_i(\lambda)$ per ogni $i = 2, \ldots, n$.

d_2) Poni $m(\lambda)$ il minimo comune multiplo di $m_1(\lambda)$, $\ldots$, $m_n(\lambda)$. Mostra che $m(f)$ è l'endomorfismo nullo.

d_3) Mostra che $m(\lambda)$ coincide con il polinomio minimo di f.

e) Calcola il polinomio minimo di: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.