12.1) Supponi che un punto $P \in \mathbf{P}^2$ sia fisso per una proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$. Mostra che, per ogni retta r del fascio di rette per P, l'immagine $\varphi(r)$ è ancora una retta per P. Interpreta questo fatto utilizzando la proiettività duale $\varphi^* : \mathbf{P}^{2*} \to \mathbf{P}^{2*}$ associata all'applicazione trasposta φ_l^t. Mostra, inoltre, che sicuramente deve esistere una retta s globalmente fissa per φ.

Soluzione: se r è una retta per P, allora $\varphi(r)$ è ancora una retta, e deve passare per $\varphi(P) = P$. Consideriamo un sistema di coordinate nel quale P abbia coordinate omogenee $[1, 0, 0]$. In tal caso, φ ha matrice della forma $A = \begin{pmatrix} g & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$, con $g \neq 0, (bf - ec) \neq 0$. La matrice di φ^* è $A^t = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ Ogni retta per P ha coordinate duali $[0, u_1, u_2]$, e il fascio per P corrisponde alla retta $u_0 = 0$.

12.2) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.

a) Determina il rango della conica e l'equazione della retta polare di $T[1, 1, 1]$.

b) Determina le coordinate omogenee del polo Q della retta r di equazione $X_1 = 0$. Determina inoltre le coordinate omogenee dei punti che compongono la quadrica intersezione Γ_r di Γ con r.

c) Determina l'equazione omogenea della retta s' che sia coniugata, rispetto all'involuzione indotta sul fascio di rette per Q dalla quadrica intersezione Γ_r, della retta di equazione $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e passante per Q.

12.3) Ricava la proposizione duale della proposizione $\mathcal{P}$ e controlla se $\mathcal{P}$ è vera:

$\mathcal{P}$: In uno spazio proiettivo di dimensione 5, comunque fissati tre iperpiani, esiste sempre un sottospazio di dimensione 2 contenuto in ciascuno di essi.

12.4) Supponi che un punto $P \in \mathbf{P}^2$ sia fisso per una proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$. Mostra che, per ogni retta r del fascio di rette per P, l'immagine $\varphi(r)$ è ancora una retta per P. Interpreta questo fatto utilizzando la proiettività duale $\varphi^* : \mathbf{P}^{2*} \to \mathbf{P}^{2*}$ associata all'applicazione trasposta φ_l^*. Mostra, inoltre, che sicuramente deve esistere una retta s (non necessariamente passante per P) globalmente fissa per φ.

Soluzione: se r è una retta per P, allora $\varphi(r)$ è ancora una retta, e deve passare per $\varphi(P) = P$. Consideriamo un sistema di coordinate nel quale P abbia coordinate omogenee $[1, 0, 0]$. In tal caso, φ ha matrice della forma $A = \begin{pmatrix} g & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$, con $g \neq 0, (bf - ec) \neq 0$. La matrice di φ^* è $A^t = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ Ogni retta per P ha coordinate duali $[0, u_1, u_2]$, e il fascio per P corrisponde alla retta $u_0 = 0$.

12.5) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

b) Determinare il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determinare l'equazione canonica proiettiva di Γ.

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 (che è, per definizione, il rango della conica). Sappiamo dunque che la conica è composta da una retta di punti sisngolari, contata con molteplicità 2.

b) Per quanto visto nel punto precedente, i punti doppi di Γ formano una retta di equazione $\mathbf{AX} = \vec{0}$, cioè $X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$, che è l'unica componente di Γ.

c) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

12.6) a) Determinare la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$2X_0X_1 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$$

b) Verificare che il punto $P_1[1,0,0]$ appartiene a Γ. È un punto semplice o doppio? Determinare l'equazione omogenea della tangente a Γ in P.

c) Determinare l'equazione omogenea della retta polare di $Q[1,2,1]$.

d) Determinare le rette passanti per il punto Q che sono tangenti a Γ nei punti di intersezione.

Soluzione a) La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il punto P_1 appartiene a Γ ed è un punto semplice. La sua tangente coincide con la polare $X_1 - 2X_2 = 0$.

b) La polare r_Q di Q ha equazione omogenea $(1\ 2\ 1)\mathbf{AX} = 2X_1 - 2X_2 = 0$, cioè $X_1 - X_2 = 0$.

c) Osserviamo che il punto Q non appartiene alla conica, e dunque esisteranno due rette per Q tangenti alla conica. Intersecando la polare r_Q con Γ si trovano i punti $P_1[1,0,0]$ e $U[1,1,1]$. Le tangenti cercate sono la polare di P_1 (cioè la retta che passa per P_1 e Q, di equazione $-X_1 + 2X_2 = 0$) e la polare di U rispetto a Γ (cioè la retta che passa per U e Q, di equazione $X_0 - X_2 = 0$) .

12.7) Sia Γ una conica di $\mathbf{P}^2$ tale che il punto $P_1[1,0,0]$ e il punto $P_2[0,1,0]$ non appartengono a Γ, e che P_2 appartiene alla polare di P_1 rispetto a Γ.

a) Che informazioni abbiamo sulla matrice associata a Γ?

b) E se imponiamo che anche $P_3[0,0,1]$ stia sulla polare di P_1?

Soluzione: a) sarà

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

con $ac \neq 0$.

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & e \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

con $ac \neq 0$.

12.8) Si consideri la quadrica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

a) Determinare la matrice $\mathbf{A}$ della quadrica, discutere se Γ è composta da punti distinti e determinare le coordinate omogenee dei punti di Γ.

b) Osservare che, per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, l'equazione $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ definisce un punto P' in $\mathbf{P}^1$, detto punto polare di P o punto coniugato di P rispetto a Γ. Determinare le coordinate di P'.

d) Se $P \in \Gamma$, chi é il coniugato P'?

e) Indicati con S, T i punti della quadrica, calcolare il birapporto $(STPP')$ quando $P[1, 0]$ (che non appartiene alla quadrica).

Soluzione: a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; poichè la matrice ha rango 2, la quadrica è composta da due punti distinti, $S = [1, i]$ e $T = [1, -i]$.

c) $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = p_0X_0 + p_1X_1 = 0$. Si ricavano le coordinate omogenee del punto $P'[p_1, -p_0]$.

d) $S' = [i, -1] = S$, $T' = [-i, -1] = T$.

e) $(STPP') = [|SP|\ |TP'|, |SP'|\ |TP|] =$

$= [det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ i & p_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ -i & -p_0 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ i & -p_0 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ -i & p_1 \end{pmatrix}] =$

$= [(p_1 - ip_0)(-p_0 + ip_1), (-p_0 - ip_1)(p_1 + ip_0)] = [1, -1]$.

12.9) Si consideri la quadrica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1$ di equazione $15X_0^2 + 16X_0X_1 - 7X_1^2 = 0$.

a) Determinare la matrice $\mathbf{A}$ della quadrica e discutere se Γ è composta da punti distinti.

b) Determinare i punti della quadrica

c) Osservare che, per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, l'equazione $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ definisce un punto P' in $\mathbf{P}^1$, detto punto polare di P o punto coniugato di P. Determinare le coordinate di P'.

d) Se $P \in \Gamma$, chi é il coniugato P'?

e) Indicati con S, T i punti della quadrica, calcolare il birapporto $(STPP')$ quando $P[1, 0]$ (che non appartiene alla quadrica).

Soluzione: a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$; poichè la matrice ha rango 2, la quadrica è composta da due punti distinti.

b) $S = [1, 3]$ e $T = [7, -5]$.

c) $(p_0\ p_1)\mathbf{A}\mathbf{X} = (15p_0 + 8p_1)X_0 + (8p_0 - 7p_1)X_1 = 0$. Si ricavano le coordinate omogenee del punto $P'[(8p_0 - 7p_1), -(15p_0 + 8p_1)]$.

d) $S' = [-13, -39] = S$, $T' =$

e) $(STPP') = [|SP|\ |TP'|, |SP'|\ |TP|] =$

$= [det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ 3 & p_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 7 & 8p_0 - 7p_1 \\ -5 & -(15p_0 + 8p_1) \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 8p_0 - 7p_1 \\ 3 & -(15p_0 + 8p_1) \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 7 & p_0 \\ -5 & p_1 \end{pmatrix}]$

La prima coordinata è: $det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ 3 & p_1 \end{pmatrix} \left(p_0 det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -5 & -15 \end{pmatrix} + p_1 det \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \right)$, cioè

$(p_1 - 3p_0)(-65p_0 - 91p_1)$

La seconda coordinata è $\left(p_0 det \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} + p_1 det \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \right) det \begin{pmatrix} 7 & p_0 \\ -5 & p_1 \end{pmatrix}$, cioè

$= (-39p_0 + 13p_1)(7p_1 + 5p_0)$

Osservando che $(-65p_0 - 91p_1) = -13(7p_1 + 5p_0)$ e $(-39p_0 + 13p_1) = 13(p_1 - 3p_0)$, si ricava che il birapporto è sempre $[1, -1]$.

12.10) Sia $\vec{\Gamma} \subset \mathbf{P}^2$ la conica di equazione:

$$2X_1^2 + X_2^2 - 2X_0X_2 = 0.$$

Determina l'equazione proiettiva canonica di $\vec{\Gamma}$ come conica reale. item Nel piano proiettivo numerico duale $\mathbf{P}^{2*}$, siano introdotte le coordinate omogeneee $[u_1, u_2, u_3]$ associate al sistema di coordinate omogenee naturali $[X_1, X_2, X_3]$ in $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$.

a) Determinare le coordinate omogenee del punto V di $\mathbf{P}^{2*}$ corrispondente alla retta r di $\mathbf{P}^2$ di equazione omogenea $3X_1 - 5X_2 + 4X_6 = 0$.

b) Determinare equazioni parametriche della retta H_P di $\mathbf{P}^{2*}$ corrispondente al punto $P[-1, 6, 2]$ di $\mathbf{P}^2$.

c) Determinare le coordinate omogenee del punto Z di $\mathbf{P}^{2*}$ corrispondente alla retta s di $\mathbf{P}^2$ di equazioni parametriche $\rho(X_1, X_2, X_3) = (\lambda + 2\mu, -\lambda - \mu, \lambda)$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, $\rho \neq 0$.

Soluzione a) $V[3, -5, 4]$ (sono i coefficienti dell'equazione omogenea della retta).

b) La retta H_P di $\mathbf{P}^{2*}$ corrispondente al punto $P[-1, 6, 2]$ di $\mathbf{P}^2$ è la retta di equazione omogenea $-u_1+6u_2+2u_3 = 0$. Ricaviamo le equazioni parametriche $\left\{ \rho u_1 = 6\lambda\rho u_2 = 1\lambda + 2\mu\rho u_3 = -6\mu \right.$ Si osservi che i punti $[6, 1, 0]$ e $[0, 2, -6]$ di $\mathbf{P}^{2*}$ corrispondono alle rette $6X_1 + X_2 = 0$ e $2X_2 - 6X_3 = 0$ di $\mathbf{P}^2$ (che sono due rette distinte che passano per P.

c) **Primo modo** Calcolo l'equazione omogenea di s e procedo come nel punto a). L'equazione omogenea di s è data da $det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = X_1 + 2X_2 + X_3 = 0$ Il punto cercato è $Z[1, 2, 1] \in \mathbf{P}^{2*}$.

Secondo modo La retta s di $\mathbf{P}^2$ passa per i punti $Q[1, -1, 1]$ e $S[2, -1, 0]$, che corrispondono alle rette $H_Q : X_1 - X_2 + X_3 = 0$ e $H_S : 2X_1 - X_2 = 0$ di $\mathbf{P}^{2*}$. Il punto cercato Z è $Z = H_Q \cap H_S = [1, 2, 1]$.