12.1) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,2,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0,0)$. Considera inoltre il sottospazio W di equazioni $x_2 = 0$ e il sottospazio U generato dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

a) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, sono linearmente indipendenti.

b) Determina la dimensione e una base dell'intersezione tra i sottospazi U e W.

12.2) Nello spazio vettoriale V delle matrici reali 2×2, si consideri il sottoinsieme U formato dalle matrici della forma XA, con $X \in V$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Mostra che $U = \{X \in V!AX = 0\}$ è un sottospazio vettoriale e determinane la dimensione ed una base.

b) Determina la dimensione e una base del sottospazio $W = \{X \in V!XA = 0\}$.

c) Controlla se U e W sono in somma diretta, cioè se $U \cap W = \{0\}$.

12.3) Nello spazio vettoriale V sul campo K, considera il sottospazio U generato dai vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Se $\mathbf{u} \in U$, considera l'insieme $S_{\mathbf{u}}$ formato dalle quaterne $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in K^4$ tale che $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3 + a_4\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

a) Mostra che $S_{\mathbf{u}}$ è un sottospazio di K^4 e determinane la dimensione.

b) Discuti se esiste $\mathbf{u}' \in U$ con $S_{\mathbf{u}} \cap S_{\mathbf{u}'} = \{\mathbf{0}\}$

12.4) Considera la matrice su un campo K

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

Controlla quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) A ha rango massimo per ogni $x, y, z \in K$;

(b) A ha rango almeno 2 per ogni $x, y, z \in K$;

(c) A ha rango massimo se e solo se x, y, z sono distinti;

(d) $det(A) = (y - x)(z - x)(z - y)$.

12.5) Considera un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 6 incognite su un campo K. Controlla quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) il sistema è compatibile se e solo se la sua matrice ha rango massimo;

(b) il sistema è compatibile;

(c) se la matrice dei coefficienti ha rango massimo allora il sistema ha una unica soluzione;

(d) se la matrice dei coefficienti ha rango massimo allora il sistema ha infinite soluzioni;

(e) se la matrice dei coefficienti ha rango massimo allora le soluzioni del sistema sono tutte proporzionali ai minori di ordine massimo della matrice presi a segni alterni.

12.6) Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ definito come

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ (x, y, z) = (z, y, x)\}.$$

a) Prova che W è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

b) Calcola la dimensione di W e determina una sua base $\mathcal{B}$.

c) Prova che il vettore $w = (3, 2, 3)$ appartiene a W e determina le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

12.7) Sia S il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$

$$S = \{(1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\}.$$

Determina i valori del parametro reale k per i quali $(k, 1, k) \in S$.

12.8) Discuti l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determina, ove esistano, le soluzioni.

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

12.9) Applicando il teorema degli orlati, determina il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Inizia controllando l'esistenza di un minore non singolare M di ordine 1, poi controlla l'esistenza di un suo orlato non singolare N, poi (eventualmente) controlla l'esistenza di un orlato non singolare di N.

12.10) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ considera i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 2, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (0, 0, 1, -2)$. Considera il sottospazio U generato dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$.

a) Determina la dimensione e una base di U.

b) Discuti se $\mathbf{u} = (1, -1, -4, 5)$ è combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_4$, e, in caso positivo, determina esplicitamente una tale combinazione lineare.

c) Determina la dimensione e una base dell'intersezione tra U e il sottospazio W di equazione $x_1 + x_2 = 0$.

12.11) Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

prova che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio delle matrici 2×3 a coefficienti reali, e completarlo ad una base di tale spazio.