12.1) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - X_0X_1 + 5X_0X_2 - 5X_1X_2 = 0$$

b) Discuti se qualcuno dei punti fondamentali del riferimento appartiene a Γ. Determina il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determina l'equazione omogenea della retta polare del punto $K[1,0,1]$ e discutere se essa contiene i punti doppi di Γ. Determina inoltre l'equazione omogenea della retta polare del punto $P_2[0,1,0]$ e confrontala con le componenti di Γ.

d) Determina l'equazione canonica proiettiva di Γ.

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\begin{pmatrix} 1 & -(1/2) & 5/2 \\ -(1/2) & 0 & -(5/2) \\ 5/2 & -(5/2) & 0 \end{pmatrix}$ oppure la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 (che è, per definizione, il rango della conica). Sappiamo dunque che la conica è unione di due rette distinte che si intersecano nell'unico punto singolare della conica.

b) Un punto fondamentale appartiene alla conica se e solo se il corrispondente elemento sulla diagonale principale di $\mathbf{A}$ è nullo. Da questa osservazione, o da un controllo diretto, si verifica che $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ sono i punti fondamentali che appartengono a Γ.

c) Per quanto visto nel punto a), Γ ha un unico punto doppio D, le cui coordinate omogenee sono soluzione non nulla di $\mathbf{AX} = \vec{0}$. Si ricava $D[5,5,-1]$. Entrambe le componenti di Γ passano per D. Intersecando Γ con la retta $X_0 = 0$ si trovano i due punti fondamentale $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$ (che già conoscevamo). Le componenti di Γ sono la retta $X_0 + 5X_2 = 0$ (passante per D e per $[0,1,0]$) e la retta $X_0 - X_1 = 0$ (passante per D e per $[0,0,1]$).

d) La polare di K ha equazione $(1\ 0\ 1)\mathbf{A}\vec{X} = 7X_0 - 6X_1 + 5X_2 = 0$. Essa passa per il punto doppio D, perchè le polari passano sempre per i punti doppi.

e) La polare di $P_2[0,1,0]$ ha equazione $(0\ 1\ 0)\mathbf{A}\vec{X} = -X_0 - 5X_2 = 0$ è una delle componenti di Γ. Si osservi che la polare r_P di un punto semplice P di una conica riducibile è sempre la componente che contiene P; infatti, la polare r_P contiene P perchè P appartiene alla conica. Inoltre, per quanto osservato nel punto precedente, r_P deve contenere anche D: se r_P non fosse contenuta nella conica, avrebbe con essa molteplicità di intersezione 2 in D e 2 in P (assurdo).

f) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

12.2) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$X_0^2 - 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1^2 - 4X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

b) Determin il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ.

c) Determina l'equazione canonica proiettiva di Γ.

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 (che è, per definizione, il rango della conica). Sappiamo dunque che la conica è composta da una retta di punti sisngolari, contata con molteplicità 2.

b) Per quanto visto nel punto precedente, i punti doppi di Γ formano una retta di equazione $\mathbf{AX} = \vec{0}$, cioè $X_0 - 2X_1 + X_2 = 0$, che è l'unica componente di Γ.

c) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

12.3) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ di equazione:

$$2X_0X_1 - 4X_0X_2 + 2X_1X_2 = 0$$

b) Verifica che il punto $P_1[1, 0, 0]$ appartiene a Γ. È un punto semplice o doppio? Determinare l'equazione omogenea della tangente a Γ in P.

c) Determina l'equazione omogenea della retta polare di $Q[1, 2, 1]$.

d) Determina le rette passanti per il punto Q che sono tangenti a Γ nei punti di intersezione.

Soluzione a) La conica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il punto P_1 appartiene a Γ ed è un punto semplice. La sua tangente coincide con la polare $X_1 - 2X_2 = 0$.

b) La polare r_Q di Q ha equazione omogenea $(1\ 2\ 1)\mathbf{AX} = 2X_1 - 2X_2 = 0$, cioè $X_1 - X_2 = 0$.

c) Osserviamo che il punto Q non appartiene alla conica, e dunque esisteranno due rette per Q tangenti alla conica. Intersecando la polare r_Q con Γ si trovano i punti $P_1[1, 0, 0]$ e $U[1, 1, 1]$. Le tangenti cercate sono la polare di P_1 (cioè la retta che passa per P_1 e Q, di equazione $-X_1 + 2X_2 = 0$) e la polare di U rispetto a Γ (cioè la retta che passa per U e Q, di equazione $X_0 - X_2 = 0$).

12.4) Considera la quadrica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

a) Determina la matrice $\mathbf{A}$ della quadrica, discuti se Γ è composta da punti distinti e determina le coordinate omogenee dei punti di Γ.

b) Osserva che, per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, l'equazione $(p_0\ p_1)\mathbf{AX} = 0$ definisce un punto P' in $\mathbf{P}^1$, detto punto coniugato di P rispetto a Γ. Determina le coordinate di P'.

c) Se $P \in \Gamma$, chi é il coniugato P'?

d) Indicati con S, T i punti della quadrica, calcola il birapporto $(STPP')$ quando $P[1, 0]$ (che non appartiene alla quadrica).

Soluzione: a) La quadrica ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; poichè la matrice ha rango 2, la quadrica è composta da due punti distinti, $S = [1, i]$ e $T = [1, -i]$.

b) $(p_0\ p_1)\mathbf{AX} = p_0X_0 + p_1X_1 = 0$. Si ricavano le coordinate omogenee del punto $P'[p_1, -p_0]$.

c) Per quanto visto al punto percedente (e per la proprietà di appartenenza della polarità) il coniugato di un punto della quadrica coincide con il punto stesso.

d) $(STPP') = [|SP|\ |TP'|, |SP'|\ |TP|] =$

$$= [det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ i & p_1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ -i & -p_0 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ i & -p_0 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ -i & p_1 \end{pmatrix}] =$$

$$= [(p_1 - ip_0)(-p_0 + ip_1), (-p_0 - ip_1)(p_1 + ip_0)] = [1, -1].$$

12.5) a) Considera una matrice reale M 3×3 di rango 1. Mostra che esistono vettori non nulli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$.

b) Siano $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$ e $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$. Dimostrare che la matrice M è simmetrica di rango 1.

c) Sia M una matrice reale 3×3 simmetrica di rango 1. Provare o trovare un controesempio all'esistenza di un vettore non nullo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$.

Soluzione (osservare che le dimostrazioni possono essere estese al caso di un vettore $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$)

a) $\Rightarrow$ Supponiamo che $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$ e mostriamo che ha rango 1.

Primo modo: rg $(M) \leq$ min $\{rg(\mathbf{v}^t), rg(\mathbf{u})\} = 1$ (interpretando il prodotto di matrici come composizione di applicazioni lineari). La matrice M è non nulla: infatti, essendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ non nulli, esistono indici i e j con $v_i \neq 0$ e $u_j \neq 0$: l'elemento di posto (i, j) in M è quindi dato dallo scalare non nullo $v_i\, u_j$. Si conclude che M ha rango 1.

Secondo modo: La matrice $M = (m_{ij})$ è della forma $m_{ij} = v_i u_j$.

$$M = \begin{pmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \end{pmatrix}$$

tutte le righe di M sono tra loro proporzionali. Ogni riga di M è un multiplo scalare del vettore $\mathbf{u}$ ed esiste almeno una riga non nulla: dunque la dimensione dello spazio generato dalle righe è 1, e quindi M ha rango 1.

$\Leftarrow$ Se M ha rango 1, ammette una riga non nulla, che chiamiamo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Esistono quindi scalari v_1, v_2, v_3 (uno dei quali sarà uguale a 1) tali che la i-ma riga di M sia uguale a $v_i\mathbf{u}$. Posto $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, risulta $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$.

b) La matrice è simmetrica perchè $M^t = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u} = M$. Inoltre, essa ha rango per quanto dimostrato al punto precedente.

c) Se esiste un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$, si deve avere $\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{pmatrix}$. In particolare, gli elementi di M sulla diagonale principale sono ≥ 0. Ad esempio, la matrice simmetrica reale di rango 1 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è di questa forma.

Chi vuole, può dimostrare che un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$ esiste se e solo se la matrice M (simmetrica di rango 1 per ipotesi) è semidefinita positiva, cioè $\mathbf{x}^t\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

12.6) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$.

a) Determina il rango della conica e l'equazione della retta polare di $T[1, 1, 1]$.

b) Determina le coordinate omogenee del polo Q della retta r di equazione $X_1 = 0$. Determina inoltre le coordinate omogenee dei punti che compongono la quadrica intersezione Γ_r di Γ con r.

c) Determina l'equazione omogenea della retta s' che sia coniugata, rispetto all'involuzione indotta sul fascio di rette per Q dalla quadrica intersezione Γ_r, della retta di equazione $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e passante per Q.

12.7) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ di equazione $15X_0^2 + 16X_0X_1 - 7X_1^2 = 0$.

a) Determina i punti della quadrica

b) Per ogni punto $P[p_0, p_1]$ di $\mathbf{P}^1$, determina le coordinate del punto coniugato P'.

c) Indicati con B_0, B_1 i punti della quadrica, calcola il birapporto (B_0B_1PP') quando $P[1, 0]$.

Soluzione: a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$; poichè la matrice ha rango 2, la quadrica è composta da due punti distinti, $B_0 = [1, 3]$ e $B_1 = [7, -5]$.

b) $(p_0\ p_1)\mathbf{AX} = (15p_0 + 8p_1)X_0 + (8p_0 - 7p_1)X_1 = 0$. Si ricavano le coordinate omogenee del punto $P'[(8p_0 - 7p_1), -(15p_0 + 8p_1)]$.

c) $(B_0 B_1 P P') = [|B_0 P|\ |B_1 P'|, |B_0 P'|\ |B_1 P|] =$

$$= [det\begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ 3 & p_1 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} 7 & 8p_0 - 7p_1 \\ -5 & -(15p_0 + 8p_1) \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 1 & 8p_0 - 7p_1 \\ 3 & -(15p_0 + 8p_1) \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} 7 & p_0 \\ -5 & p_1 \end{pmatrix}]$$

La prima coordinata è: $det\begin{pmatrix} 1 & p_0 \\ 3 & p_1 \end{pmatrix}\left(p_0 det\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -5 & -15 \end{pmatrix} + p_1 det\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}\right)$, cioè

$(p_1 - 3p_0)(-65p_0 - 91p_1)$

La seconda coordinata è $\left(p_0 det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} + p_1 det\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}\right) det\begin{pmatrix} 7 & p_0 \\ -5 & p_1 \end{pmatrix}$, cioè

$= (-39p_0 + 13p_1)(7p_1 + 5p_0)$

Osservando che $(-65p_0 - 91p_1) = -13(7p_1 + 5p_0)$ e $(-39p_0 + 13p_1) = 13(p_1 - 3p_0)$, si ricava che il birapporto è sempre $[1, -1]$.