11.1) a) Determina il gruppo fondamentale del toro $\mathbf{T}$ privato di un punto.

b) Determina il gruppo fondamentale di $\mathbf{T}$ applicando il teorema di Van Kampen.

11.2) Determina il gruppo fondamentale di un bouquet di n circonferenze.

11.3) Determina il gruppo fondamentale dello spazio topolgico X ottenuto togliendo m punti distinti a $\mathbf{R}^2$ (top. euclidea).

11.4) Siano $X = \mathbf{P}^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n, H un suo iperpiano, $a \in H$ un punto. Mostra che, se $n \geq 2$, l'inclusione $\iota : H \to X$ induce una applicazione suriettiva $\pi_1(H, a) \to \pi_1(X, a)$.

11.5) Considera due circonferenze S_1 e S_2 nel piano euclideo e un punto p_0 in S_1. Determina $\pi_1(S_1 \cup S_2, p_0)$ in funzione dela posizione relativa tra le due circonferenze.

11.6) In $\mathbf{R}^3$ si considerino le rette $r : x = y = 0$ e $s : z = 0, x = 1$. Si denoti con X il sottospazio $\mathbf{R}^3 \setminus (r \cup s)$, con topologia indotta dalla topologia euclidea.

i) Calcolare il gruppo fondamentale di X.

ii) Esistono due punti p e q in $\mathbf{R}^3$ tali che X sia omeomorfo a $\mathbf{R}^3 \setminus \{p, q\}$?

iii) Esistono due punti p e q in $\mathbf{R}^2$ tali che X sia omeomorfo a $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$? Stessa domanda sostituendo "omeomorfo" con "retratto di deformazione".

iv) Sia x un punto di X. Calcola il gruppo fondamentale di $X \setminus \{x\}$.

11.7) Mostra che, se $x_0 \in S^1$, il sottoinsieme $\mathbf{R} \times \{x_0\}$ è retratto di $\mathbf{R} \times S^1$, ma non è retratto di deformazione forte.

Testo del secondo esonero dell'anno accademico 2010-11:

1) Sia X il quoziente di $\mathbf{R}$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } |x| = |y| > 1.$$

Discutere se X è connesso, se è compatto e se è di Hausdorff.

2) Sia $X = (0, 1)$, con topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}$. Mostra che la compattificazione di Alexandroff $(X \times X)^*$ di $X \times X$ non è omeomorfa al prodotto $X^* \times X^*$, ove con X^* si denoti la compattificazione di Alexandroff di X.

3) Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$, con la topologia indotta dalla topologia euclidea in $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare il gruppo fondamentale di X e di $X \setminus \{p\}$ al variare di $p \in X$.

b) Discutere se $\{(x, y, 1) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ è retratto di deformazione di X e se è retratto di X.

c) Discutere se $Y = X \cup \{(x, 0, 1) \in \mathbf{R}^3 \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale, prendendo l'origine come punto base.