Spazio duale

11.1) Considera la base duale $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*,\, \mathbf{e}_2^*,\, \mathbf{e}_3^*\}$ della base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Calcola $\mathbf{e}_1^*(2, 1, -13)$, $(3\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + 5\mathbf{e}_3^*)(x_1, x_2, x_3)$.

b) Determina il nucleo di $3\mathbf{e}_1^* + 9\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*$.

c) Determina le coordinate, rispetto alla base $\mathcal{E}^*$, della forma lineare $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, definita da $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$.

d) Sia $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma lineare tale che $f(1, 2, 4) = 1$, $f(1, 0, 1) = 0$, $f(0, 0, 1) = 3$. Determina le coordinate di f rispetto alla base $\mathcal{E}^*$ di $(\mathbf{R}^3)^*$.

11.2) In uno spazio vettoriale V, considera una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e denota con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*\}$ la base duale. Sia $f = 3\mathbf{v}_1^* + 2\mathbf{v}_2^* - 5\mathbf{v}_4^*$. Determina $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4)$.

11.3) In $\mathbf{R}^3$, considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, ove $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ e denota con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$ la base duale.

a) Determina $\mathbf{v}_2^*(\mathbf{v})$, ove $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

b) Determina $\mathbf{v}_i^*(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$.

11.4) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare (su un campo $\mathbf{K}$), l'applicazione trasposta (o duale) di f è l'applicazione lineare $f^t : W^* \to V^*$ che associa ad ogni forma lineare $\varphi : W \to \mathbf{K}$ la composizione $f^t(\varphi) = f \circ \varphi$.

Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3)$ e l'applicazione trasposta $f^t : \mathbf{R}^{2*} \to \mathbf{R}^{3*}$. Determina la matrice dell'applicazione trasposta f^t, rispetto alle basi duali delle basi canoniche.

11.5) Sia U un sottospazio di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Considera l'inclusione $\iota : U \to V$ definita da $\iota(u) = u$, $\forall u \in U$. Chi è l'applicazione duale ι^t?

11.6) Sia $f\colon V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Mostra che, se f è iniettiva, allora l'applicazione duale f^t è suriettiva.

11.7) Ricava la proposizione duale della proposizione $\mathcal{P}$ e discutine la verità:

$\mathcal{P}$: In uno spazio vettoriale di dimensione 5, comunque fissati due sottospazi di dimensione 2, il loro spazio somma è un sottospazio proprio.

$\mathcal{P}$: In uno spazio vettoriale di dimensione 6, comunque fissati due sottospazi di codimensione 2, la loro intersezione ha dimensione almeno 1.

$\mathcal{P}$: In uno spazio proiettivo di dimensione 4, due sottospazi di dimensione 2, il cui spazio congiungente è l'intero spazio, sono in somma diretta.

$\mathcal{P}$: In uno spazio proiettivo, il sottospazio congiungente di due sottospazi distinti di codimensione 1 coincide con tutto lo spazio.

$\mathcal{P}$: Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbf{P}^4$, il sottospazio congiungente tre punti non allineati ha codimensione 2.

$\mathcal{P}$: In uno spazio proiettivo di dimensione 5, comunque fissati tre sottospazi di dimensione 4, esiste sempre un sottospazio di dimensione 1 contenuto in ciascuno di essi.