11.1) a) Determina la matrice associata e il rango della conica $\Gamma \subset \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$ di equazione:

$$X_0^2 - X_0X_1 + 5X_0X_2 - 5X_1X_2 = 0$$

b) Discuti se qualcuno dei punti fondamentali del riferimento appartiene a Γ . Determina il luogo dei punti singolari e le componenti di Γ .

c) Determina l'equazione omogenea della retta polare del punto $K[1, 0, 1]$ e discuti se essa contiene i punti doppi di Γ . Determina inoltre l'equazione omogenea della retta polare del punto $P_2[0, 1, 0]$ e confrontala con le componenti di Γ .

d) Determina l'equazione canonica proiettiva di Γ .

Soluzione: a) Come matrice, possiamo utilizzare $\begin{pmatrix} 1 & -(1/2) & 5/2 \\ -(1/2) & 0 & -(5/2) \\ 5/2 & -(5/2) & 0 \end{pmatrix}$ oppure la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 2 (che è, per definizione, il rango della conica).

Sappiamo dunque che la conica è unione di due rette distinte che si intersecano nell'unico punto singolare della conica.

b) Un punto fondamentale appartiene alla conica se e solo se il corrispondente elemento sulla diagonale principale di $\mathbf{A}$ è nullo. Da questa osservazione, o da un controllo diretto, si verifica che $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$ sono i punti fondamentali che appartengono a Γ .

c) Per quanto visto nel punto a), Γ ha un unico punto doppio D , le cui coordinate omogenee sono soluzione non nulla di $\mathbf{A}\mathbf{X} = \vec{0}$. Si ricava $D[5, 5, -1]$. Entrambe le componenti di Γ passano per D . Intersecando Γ con la retta $X_0 = 0$ si trovano i due punti fondamentali $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$ (che già conoscevamo). Le componenti di Γ sono la retta $X_0 + 5X_2 = 0$ (passante per D e per $[0, 1, 0]$) e la retta $X_0 - X_1 = 0$ (passante per D e per $[0, 0, 1]$).

d) La polare di K ha equazione $(1 \ 0 \ 1)\mathbf{A}\vec{X} = 7X_0 - 6X_1 + 5X_2 = 0$. Essa passa per il punto doppio D , perchè le polari passano sempre per i punti doppi.

e) La polare di $P_2[0, 1, 0]$ ha equazione $(0 \ 1 \ 0)\mathbf{A}\vec{X} = -X_0 - 5X_2 = 0$ è una delle componenti di Γ . Si osservi che la polare r_P di un punto semplice P di una conica riducibile è sempre la componente che contiene P ; infatti, la polare r_P contiene P perchè P appartiene alla conica. Inoltre, per quanto osservato nel punto precedente, r_P deve contenere anche D : se r_P non fosse contenuta nella conica, avrebbe con essa molteplicità di intersezione 2 in D e 2 in P (assurdo).

f) L'equazione canonica proiettiva di Γ è $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$, in un opportuno riferimento.

11.2) a) Considera una matrice reale $M \ 3 \times 3$ di rango 1. Mostra che esistono vettori non nulli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{v}^t \mathbf{u}$.

b) Siano $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$ e $M = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$. Dimostrare che la matrice M è simmetrica di rango 1.

c) Sia M una matrice reale 3×3 simmetrica di rango 1. Provare o trovare un controesempio all'esistenza di un vettore non nullo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$.

Soluzione (osservare che le dimostrazioni possono essere estese al caso di un vettore $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$)

a) $\Rightarrow$ Supponiamo che $M = \mathbf{v}^t \mathbf{u}$ e mostriamo che ha rango 1.

Primo modo: $\text{rg}(M) \leq \min \{\text{rg}(\mathbf{v}^t), \text{rg}(\mathbf{u})\} = 1$ (interpretando il prodotto di matrici come composizione di applicazioni lineari). La matrice M è non nulla: infatti, essendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ non nulli, esistono indici i e j con $v_i \neq 0$ e $u_j \neq 0$: l'elemento di posto (i, j) in M è quindi dato dallo scalare non nullo $v_i u_j$. Si conclude che M ha rango 1.

Secondo modo: La matrice $M = (m_{ij})$ è della forma $m_{ij} = v_i u_j$.

$$M = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \end{pmatrix}$$

tutte le righe di M sono tra loro proporzionali. Ogni riga di M è un multiplo scalare del vettore $\mathbf{u}$ ed esiste almeno una riga non nulla: dunque la dimensione dello spazio generato dalle righe è 1, e quindi M ha rango 1.

$\Leftarrow$ Se M ha rango 1, ammette una riga non nulla, che chiamiamo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Esistono quindi scalari v_1, v_2, v_3 (uno dei quali sarà uguale a 1) tali che la i -ma riga di M sia uguale a $v_i \mathbf{u}$. Posto $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, risulta $M = \mathbf{v}^t \mathbf{u}$.

b) La matrice è simmetrica perchè $M^t = \mathbf{u}^t \mathbf{v} = M$. Inoltre, essa ha rango per quanto dimostrato al punto precedente.

c) Se esiste un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$, si deve avere $\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{pmatrix}$. In particolare,

gli elementi di M sulla diagonale principale sono ≥ 0 . Ad esempio, la matrice simmetrica reale di rango 1 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è di questa forma.

Chi vuole, può dimostrare che un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$ esiste se e solo se la matrice M (simmetrica di rango 1 per ipotesi) è semidefinita positiva, cioè $\mathbf{x}^t M \mathbf{x} \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

11.3) Consideri la conica $\Gamma \subset \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ di equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_0 X_1 + 2X_1 X_2 = 0$.

a) Determina il rango della conica e l'equazione della retta polare di $T[1, 1, 1]$.

b) Determina le coordinate omogenee del polo Q della retta r di equazione $X_1 = 0$. Determina inoltre le coordinate omogenee dei punti che compongono la quadrica intersezione Γ_r di Γ con r .

c) Determina l'equazione omogenea della retta s' che sia coniugata, rispetto all'involuzione indotta sul fascio di rette per Q dalla quadrica intersezione Γ_r , della retta di equazione $a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0$ e passante per Q .

11.4) In $\mathbf{P}^4$ siano assegnato il punto $P[2, 1, 0, 0, 1]$ e il sottospazio Z di equazioni $X_0 - X_3 = 0, X_1 + X_2 + X_4 = 0$.

a) Determinare la dimensione di Z ed una sua rappresentazione parametrica.

b) Determinare la dimensione della stella $\mathcal{H}(Z)$ di iperpiani per Z . Determinare inoltre una descrizione parametrica di $\mathcal{H}(Z)$ come sottospazio di $\mathbf{P}^{3*}$, in coordinate duali.

c) Determinare la dimensione ed un sistema normale di equazioni omogenee di $\mathcal{H}(P) \cap \mathcal{H}(Z)$.