11.1) Supponi che un punto $P \in \mathbf{P}^2$ sia fisso per una proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$. Mostra che, per ogni retta r del fascio di rette per P, l'immagine $\varphi(r)$ è ancora una retta per P. Interpreta questo fatto utilizzando la proiettività duale $\varphi^* : \mathbf{P}^{2*} \to \mathbf{P}^{2*}$ associata all'applicazione trasposta φ_l^t. Mostra, inoltre, che sicuramente deve esistere una retta s globalmente fissa per φ.

11.2) Nel piano euclideo, sia assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, con coordinate (x, y). Si assegni, nel completamento proiettivo del piano, il sistema di coordinate omogenee associato $[X_0, X_1, X_2]$.

a) Determina le coordinate omogenee di $P(3, 2)$.

b) Determina l'equazione omogenea del completamento proiettivo della retta affine s di equazione $5x - 7y + 12 = 0$ e calcola le coordinate omogenee del suo punto improprio.

c) Determina l'equazione omogenea della retta passante per P e avente lo stesso punto improprio del completamento proiettivo della retta s definita nel punto precedente.

d) Determina l'equazione affine della retta il cui completamento proiettivo ha equazione $2X_0 - X_1 + 4X_2 = 0$.

Soluzioni

a) $P[1, 3, 2]$.

b) $5X_1 - 7X_2 + 12X_0 = 0$; il punto improprio è $[0, 7, 5]$ (è l'unico punto della retta con la prima coordinata omogenea nulla).

c) La retta cercata ha equazione

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = -5X_1 + 7X_2 + X_0 = 0.$$

Notare che tale retta è esattamente il completamento proiettivo della retta affine s' passante per P e parallela ad s (s' ha equazione affine $-5x + 7y + 1 = 0$).

d) $2x - y + 4 = 0$.

11.3) Nel piano affine reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Determinare un sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo della retta $x = 0$.

Sol: La retta $x = 0$ è parametrizzata dalla coordinata y. Il sistema di coordinate omogenee associato assegna al punto $P(0, y)$, di coodinata affine y, le coordinate $[1, y]$. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[0, 1]$.

11.4) Nel piano affine reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Sia r la retta di equazione $3x - 2y = 0$.

a) Sul completamento proiettivo di r, determina il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ associato al riferimento di r dato da $(O, \vec{v} = (2, 3))$.

b) Determina il sistema di coordinate omogenee $[X'_0, X'_1]$ associato al riferimento di r dato da $(A(4, 6), \vec{w} = (-12, -18))$.

c) Determina il cambio di coordinate omogenee che lega le coordinate $[X_0, X_1]$ e $[X'_0, X'_1]$ definite ai punti precedenti.

Sol: a) Il punto $P(x, y) = (0, 0)+t(2, 3)$ corrisponde al parametro affine t; le coordinate omogenee corrispondenti sono $[X_0, X_1] = [1, t]$. Osserviamo che $t = x/2 = y/3$, nei termini delle coordinate piane di P. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[0, 1]$.

b) Utilizzando la parametrizzazione $P(x, y) = (4, 6) + s(-12, -18)$, al punto $P(x, y)$ risultano associate le coordinate omogenee $[1, s]$. Osserviamo che $s = \frac{4-x}{12} = \frac{16-y}{18}$, nei termini delle coordinate piane di P. Al punto improprio, restano associate le coordinate $[0, 1]$.

Il confronto tra i parametri affini t ed s è dato da $t(2, 3) = (4, 6) + s(-12, -18)$, cioè $t = 2 - 6s$. Il corrispondente cambio di coordinate omogenee è dato quindi da $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ sui punti propri, e, più in generale $\begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} \quad \rho \in \mathbf{R}, \rho \neq 0.$

11.5) Nella retta affine reale r, sia fissato un riferimento e siano $A(a)$ e $B(b)$ due punti distinti. Detto M il punto medio di A e B, calcola il birapporto $(AB\, r_\infty M)$ nel completamento proiettivo di r.

Calcola, infine, il birapporto $(Ar_\infty BM)$.

Soluzione. Sul completamento proiettivo di r, assegno le coordinate omogenee associate al riferimento scelto: al punto $Q(q) \in r$ assegno le coordinate $[1, q]$, mentre a r_∞ assegno le coordinate $[0, 1]$. Ottengo $A[1, a]$, $B[1, b]$, $M[2, a + b]$. Ora calcolo il birapporto in modo esplicito:

$$(ABr_\infty M) = [det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}].$$

Ricavo che $(ABr_\infty M) = [a-b, b-a] = [1, -1]$ (dove l'uguaglianza segue osservando che $a-b \neq 0$ perché ho supposto distinti i due punti A e B). Si noti che tale birapporto NON dipende da A e B.

Osserviamo anche che $(Ar_\infty BM) = [2, 1] = [1, 1/2]$. Infatti, tale birapporto mi deve fornire le coordinate del punto medio tra l'origine e il punto di coordinate affini 1; è possibile anche svolgere direttamente i conti:

$$(Ar_\infty BM) = [det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & a+b \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}] = [2, 1].$$

11.6) Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Considera l'affinità di equazioni $x' = 3x - 2y + 7, y' = 10x + y - 3$ e descrivi le equazioni della proiettività indotta sul completamento proiettivo.

11.7) Nel piano proiettivo numerico reale, considera la proiettività φ del piano in se stesso, di equazioni $\varphi([X_0, X_1, X_2]) = [3X_0, X_0 + X_1 + 4X_2, 2X_0 + 2X_1 + 3X_2]$. Controlla se φ è indotta da una affinità del piano affine (pensato come sottoinsieme attraverso l'inclusione standard).

11.8) Individua l'omogeneizzazione del polinomio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2 + 3 = 0$.

11.9) Nel piano proiettivo numerico, considera un iperpiano H di equazione $f(X_0, X_1, X_2) = u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$. Mostra che $\mathbf{P}^n \setminus H$ può essere identificato con $\mathbf{A}^2$, analogamente a quanto fatto quando $H = \pi_\infty$.