Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.

Geometria 3 a.a. 2011-12 Decimo incontro

10.1) Sia D^2 il disco unitario chiuso in $\mathbf{R}^2$ (topologia euclidea). Mostra che il quoziente $D^2/\ S^1$ è omeomorfo a S^2.

10.2) Mostra che ogni sottospazio Y di $\mathbf{R}^3$ (topologia euclidea) formato da due rette sghembe ha lo stesso tipo di omotopia di uno spazio topologico formato da due punti, con topologia discreta.

10.3) Considera il sottospazio X di $\mathbf{R}^2$ (topologia euclidea) definito da:

$$X = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1 \text{ oppure } x = 0\}.$$

Mostra che X ha lo stesso tipo di omotopia di una figura a otto (il bouquet di due circonferenze).

10.4) Considera il sottospazio T di $\mathbf{R}^2$ (topologia euclidea) formato da un triangolo di vertici A,B, C (con A, B, C tre punti a due a due distinti. Mostra che ogni sottospazio A formato da una coppia di lati di T è retratto di deformazione di T. Descrivi in modo esplicito una retrazione quando $T = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0, z + y \leq 1\}$ e A è il sottospazio formato dai lati paralleli agli assi.

10.5) In $\mathbf{R}^2$, siano A e B due circonferenze che non si intersecano tra loro. Sia inoltre r una retta secante A ed esterna a B. Contare le componenti connesse per arco di $\mathbf{R}^2 \setminus (A \cup B \cup r)$.

10.6) Siano X e Y spazi topologici (non vuoti), e sia A un sottospazio non vuoto di X. Discuti se la seguente affermazione è vera: $A \times Y$ è retratto di $X \times Y$ se e solo se A è retratto di X.

10.7) Siano A, B, C sottoinsiemi di uno spazio topologico X. Mostra che se A è retratto di B e B è retratto di C, allora A è retratto di C.

10.8) Mostra che se $f : X \to S^2$ è una applicazione continua non suriettiva, allora f è omotopa ad una costante.

10.9) Sia $p : X \to Y$ un'applicazione continua. Una applicazione $s : Y \to X$ è una *sezione* di p se $p(s(y)) = y$ per ogni $y \in Y$. Mostra che, se esiste una sezione continua di p, allora p è una applicazione quoziente.