Polinomio minimo, endomorfismi nilpotenti, forma di Jordan, teorema di Hamilton-Cayley, matrici ortogonalmente diagonalizzabili

Criterio di Cartesio Sia $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n?1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ un polinomio di grado n in λ le cui radici sono tutte reali e non nulle (se il polinomio ha k radici nulle, possiamo ridurci al caso di un polinomio con radici non nulle mettendo in evidenza il fattore λ^k). Sia $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ la successione dei coefficienti di $P(\lambda)$. Allora il numero di radici positive di $P(\lambda)$ è uguale al numero di variazioni di segno nel passare da a_n al coefficiente non nullo successivo, e così via.

10.1) Mostra che una matrice quadrata A e la sua trasposta A^t hanno gli stessi autovalori, ma, in generale, autovettori distinti.

Soluzione: Poichè $(A - \lambda I) = (A^t - \lambda I)$ e il determinante di una matrice coincide con il determinante della trasposta, A e A^t hanno lo stesso polinomio caratteristico, e quindi gli stessi autovalori (con le stesse molteplicità algebriche). Per osservare che gli autovettori non sono necessariamente gli stessi, basta considerare, ad esempio, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. In tal caso, $\vec{e}_1$ è un autovettore per A ma non per A^t.

10.2) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ove $\mathbf{A}$ è la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina il polinomio caratteristico di f e verifica che f è triangolabile (cioè esiste un riferimento in cui la matrice che rappresenta f sia triangolare superiore).

b) Verifica che f è nilpotente (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$) determinando esplicitamente il più piccolo indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$.

c) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e una base per $Imf \cap Kerf$.

Cenni di soluzione: {Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\}$$

10.3) a) Determina gli autovalori di A, attraverso la traccia e il determinante, ove $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Determina una matrice diagonale Δ e una matrice invertibile C tale che $A = C\Delta C^{-1}$.

c) Calcola A^2 e verifica che A soddisfa il suo polinomio caratteristico.

d) Calcola una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 generato dalle potenze di A.

e) Calcola A^4 e le sue coordinate nella base $\mathcal{B}$ determinata al punto precedente.

Cenni di soluzione: {Risulta

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.\}$$

10.4) Considera un endomorfismo non nullo f di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n. Mostra che f è nilpotente se e solo se lo spettro di f è $\{0\}$.

10.5) Mostra che, se f è un endomorfismo triangolabile, esiste un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare inferiore.

10.6) Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione definita da $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che f è triangolabile.

b) Determina una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0 e il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0 nella forma canonica di Jordan.

c) Determina un riferimento R tale che $M_R(f)$ sia triangolare superiore.

Cenni di soluzione: {Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\}$$

10.7) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione definita da $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verifica che f è triangolabile e nilpotente. (cioè esiste un indice $t > 0$ tale che $f^t = 0$).
b) Determina una base dell'autospazio di autovalore 0 e la forma canonica di Jordan di f.
Cenni di soluzione: {Il numero di blocchi e' uguale alla dimensione dell'autospazio di autovalore 0. Risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\}$$

10.8) Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V f.g., di cui $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sia una base.

a) Dimostra che l'insieme $I(f)$ dei polinomi $p(\lambda) \in K[\lambda]$ tali che $p(f)$ è l'endomorfismo nullo, è un ideale principale non nullo di $K[\lambda]$. Il generatore monico di $I(f)$ (caratterizzato dal fatto di essere il polinomio monico non nullo di grado mimimo in $I(f)$) è detto il *polinomio minimo* di f e viene denotato con $m_f(\lambda)$.

b) Dimostra che le radici del polinomio minimo sono elementi dello spettro.

c) Dimostra che, se f è diagonalizzabile, il polinomio minimo ha solo radici semplici e l'insieme delle sue radici coincide con l'insieme degli autovalori di f (cioè, in questo caso, con lo spettro).

d)Dimostra che il polinomio minimo può essere calcolato come segue.

d_1) Considera il numero minimo h_1 tra gli indici $t > 0$ per i quali i vettori $\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_1)$, ..., $f^t(\mathbf{v}_1)$ siano linearmente dipendenti. Sia $m_1(\lambda)$ un polinomio monico di grado h_1 tale che l'endomorfismo $m_1(f)$ verifichi $m_1(f)(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$ (quanti ce ne sono?). In modo analogo, definisci h_i e $m_i(\lambda)$ per ogni $i = 2, \ldots, n$.

d_2) Poni $m(\lambda)$ il minimo comune multiplo di $m_1(\lambda)$, ..., $m_n(\lambda)$. Mostra che $m(f)$ è l'endomorfismo nullo.

d_3) Mostra che $m(\lambda)$ coincide con il polinomio minimo di f.

e) Calcola il polinomio minimo di: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.9) Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determina gli autovalori e gli autospazi di f.

b) Determina, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice D di f in tale base sia diagonale.

c) Posso trovare una base di $\mathbf{R}^2$ formata di autovettori per f che siano tra loro ortogonali rispetto al prodotto scalare usuale in $\mathbf{R}^2$?

Soluzione: a) L'applicazione f ha rango 1, dunque ha nucleo non banale e 0 è un autovalore. L'autospazio $V_0 = Ker\, f$ è generato da $\vec{v} = (1, 2)$, mentre Imf è generata dalla prima colonna di A, $\vec{w} = (-3, 1)$. Se f ammette autovettori di autovalore non nullo, il vettore $\vec{w}$ deve essere uno di questi; si verifica direttamente che $f(\vec{w}) = 7\vec{w}$: dunque anche 7 è un autovalore per f, e $Span(\vec{w})$ è il corrispondente autospazio. Poichè $\mathbf{R}^2$ ha dimensione 2, l'applicazione f non ammette altri autovalori.

b) Per quanto osservato al punto precedente, l'insieme $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{w}\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori per f e risponde alle richieste.

c) No, perchè non esistono autovettori non nulli di f tra loro ortogonali; infatti gli autovettori di f sono contenuti in V_0 e V_7, che hanno entrambi dimensione 1 e sono generati da vettori non ortogonali.

10.10) a) Considera una matrice reale M 3×3 di rango 1. Mostra che esistono vettori non nulli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$.

b) Siano $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$ e $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$. Dimostra che la matrice M è simmetrica di rango 1.

c) Sia M una matrice reale 3×3 simmetrica di rango 1. È vero che esiste un vettore non nullo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}^3$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$? Mostra che vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$ esiste se e solo se la matrice M (simmetrica di rango 1 per ipotesi) è semidefinita positiva, cioè $\mathbf{x}^t\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

Soluzione (osservare che le dimostrazioni possono essere estese al caso di un vettore $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$)

a) $\Rightarrow$ Supponiamo che $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$ e mostriamo che ha rango 1.

Primo modo: rg $(M) \leq$ min $\{rg(\mathbf{v}^t), rg(\mathbf{u})\} = 1$ (interpretando il prodotto di matrici come composizione di applicazioni lineari). La matrice M è non nulla: infatti, essendo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ non nulli, esistono indici i e j con $v_i \neq 0$ e $u_j \neq 0$: l'elemento di posto (i, j) in M è quindi dato dallo scalare non nullo $v_i\, u_j$. Si conclude che M ha rango 1.

Secondo modo: La matrice $M = (m_{ij})$ è della forma $m_{ij} = v_i u_j$.

$$M = \begin{pmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \end{pmatrix}$$

tutte le righe di M sono tra loro proporzionali. Ogni riga di M è un multiplo scalare del vettore $\mathbf{u}$ ed esiste almeno una riga non nulla: dunque la dimensione dello spazio generato dalle righe è 1, e quindi M ha rango 1.

$\Leftarrow$ Se M ha rango 1, ammette una riga non nulla, che chiamiamo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Esistono quindi scalari v_1, v_2, v_3 (uno dei quali sarà uguale a 1) tali che la i-ma riga di M sia uguale a $v_i\mathbf{u}$. Posto $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, risulta $M = \mathbf{v}^t\ \mathbf{u}$.

b) La matrice è simmetrica perchè $M^t = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u} = M$. Inoltre, essa ha rango per quanto dimostrato al punto precedente.

c) Se esiste un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$, si deve avere $\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{pmatrix}$. In particolare, gli elementi di M sulla diagonale principale sono ≥ 0. Ad esempio, la matrice simmetrica reale di rango 1 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è di questa forma.

Chi vuole, può dimostrare che un vettore $\mathbf{u}$ tale che $M = \mathbf{u}^t\ \mathbf{u}$ esiste se e solo se la matrice M (simmetrica di rango 1 per ipotesi) è semidefinita positiva, cioè $\mathbf{x}^t\mathbf{M}\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

10.11) Determina il segno delle radici del polinomio $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ (che ha due radici reali), applicando il criterio di Cartesio. Controlla il risultato calcolando esplicitamente le radici.

10.12) Determina una matrice ortogonale O tale che $O^{-1}AO$ sia diagonale, ove $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Deduci la segnatura di A e controlla applicando il criterio di Cartesio al polinomio caratteristico.

Analoghe domande quando $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, sapendo che 1 è un autovalore.