10.1) Dimostra che, se $f : V \to V$ è diagonalizzabile, e W è un sottospazio f-stabile, allora l'applicazione $\overline{f} : V/W \to V/W$, definita da $\overline{f}([v]) = [f(v)]$, è diagonalizzabile.

10.2) Considera la base duale $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ della base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Calcola $\mathbf{e}_1^*(2, 1, -13)$, $(3\mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* + 5\mathbf{e}_3^*)(x_1, x_2, x_3)$.

b) Determina il nucleo di $3\mathbf{e}_1^* + 9\mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*$.

c) Determina le coordinate, rispetto alla base $\mathcal{E}^*$, della forma lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, definita da $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$.

d) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma lineare tale che $f(1, 2, 4) = 1$, $f(1, 0, 1) = 0$, $f(0, 0, 1) = 3$. Determina le coordinate di f rispetto alla base $\mathcal{E}^*$ di $(\mathbf{R}^3)^*$.

10.3) In uno spazio vettoriale V, considera una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ e denota con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*, \mathbf{v}_4^*\}$ la base duale. Sia $f = 3\mathbf{v}_1^* + 2\mathbf{v}_2^* - 5\mathbf{v}_4^*$. Determina $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4)$.

10.4) In $\mathbf{R}^3$, considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, ove $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ e denota con $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$ la base duale.

a) Determina $\mathbf{v}_2^*(\mathbf{v})$, ove $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$.

b) Determina $\mathbf{v}_i^*(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$.

10.5) Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare (su un campo $\mathbf{K}$), l'applicazione trasposta (o duale) di f è l'applicazione lineare $f : W^* \to V^*$ che associa ad ogni forma lineare $\varphi : W \to \mathbf{K}$ la composizione $f^t(\varphi) = f \circ \varphi$.

Considera l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + x_3)$ e l'applicazione trasposta $f^t : \mathbf{R}^{2*} \to \mathbf{R}^{3*}$. Determina la matrice dell'applicazione trasposta f^t, rispetto alle basi duali delle basi canoniche.

10.6) Sia U un sottospazio di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Considera l'inclusione $\iota : U \to V$ definita da $\iota(u) = u$, $\forall u \in U$. Chi è l'applicazione duale ι^t?

10.7) Sia $L : V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Mostra che, se L è iniettiva, allora la duale L^t è suriettiva.

10.8) Ricava la proposizione duale della proposizione $\mathcal{P}$:

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale di dimensione 5, comunque fissati due sottospazi di dimensione 2, il loro spazio somma è un sottospazio proprio.

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale di dimensione 6, comunque fissati due sottospazi di codimensione 2, la loro intersezione ha dimensione almeno 1.

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale di dimensione 4, due sottospazi di dimensione 2, il cui spazio somma è l'intero spazio, sono in somma diretta.

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale, il sottospazio somma di due sottospazi distinti di codimensione 1 coincide con tutto lo spazio.

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale, se un sottospazio è incluso in un altro, la dimensione del sottospazio somma è uguale alla maggiore tra le dimensioni dei sottospazi.

$\mathcal{P}$: In uno vettoriale di dimensione 5, comunque fissati tre sottospazi di dimennsione 4, esiste sempre un sottospazio di dimensione 2 contenuto in ciascuno di essi.

Test 1 *Nello spazio proiettivo numerico reale* $\mathbf{P}^4$*, considera la proposizione* il sottospazio congiungente tre punti non allineati ha codimensione 2*. La proposizione duale è equivalente a*

V F (a) l'intersezione di tre iperpiani a due a due distinti ha dimensione 2*;*

V F (b) se tre iperpiani contengono una stessa retta, la loro intersezione ha dimensione duale 2*;*

V F (c) se tre iperpiani non appartengono allo stesso fascio, si intersecano in un sottospazio di dimensione 1 *.*

Test 2 *Nello spazio vettoriale* $\mathbf{R}^3$*, considera l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita da* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 4x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$ *e l'applicazione trasposta* $f^t : \mathbf{R}^{3*} \to \mathbf{R}^{3*}$ *indotta tra gli spazi vettoriali duali.*

(a) l'applicazione f^t *ha rango* 2*;*

(b) il nucleo di f^t *è generato da* $-7e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$*;*

(c) l'intersezione dei nuclei delle forme lineari $\varphi \in Im\, f^t$ *è uno spazio vettoriale non nullo.*

Test 3 *Nello spazio proiettivo numerico reale* $\mathbf{P}^5$*, considera i punti* $A[1, 0, 0, 1, 1, 3]$*,* $B[0, 0, 1, 1, 1, 1]$*,* $C[2, 1, -1, 0, 0, 0]$ *e il sottospazio congiungente* $U = A \vee B \vee C$*.*

(a) la stella di iperpiani per U *ha dimensione proiettiva 2;*

(b) per ogni iperpiano H *di* $\mathbf{P}^5$*, l'intersezione di* H *con* U *contiene una retta;*

(c) esiste una unica proiettività di $\mathbf{P}^5$ *in sè per la quale* U *è puntualmente fisso.*

Test 4 *Nello spazio vettoriale* $\mathbf{R}^3$*, considera la base* $\mathcal{B}$ *formata dai vettori* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$*,* $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$*,* $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0)$ *e* U *il sottospazio generato da* $\mathbf{v}_1$*. Denota con* $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$*,* $\mathbf{e}_3$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$ *e con* $\mathbf{e}_1$*,* $\mathbf{e}_2$*,* $\mathbf{e}_3$ *la base duale.*

V F (a) $(2e_1^* + e_2^* + 3e_3^*)(\mathbf{v}_3) = 1$*;*

V F (b) l'annullatore di U *contiene* $-3e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^*$*;*

V F (c) la base duale di $\mathcal{B}$ *è* $\mathbf{f}_1 = e_1^* + e_2^*$*,* $\mathbf{f}_2 = -e_1^* - e_2^* + e_3^*$*,* $\mathbf{f}_3 = -e_2^*$*.*

Test 5 *Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da* $(x, y) \mapsto [1, x, y]$*. Considera inoltre la retta* r *di equazione* $2x - 6y + 3 = 0$*.*

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$ *è parallela ad* r*;*

V F (b) il completamento proiettivo di r *ha equazione omogenea* $3x_0 + 2x_1 - 6x_2 = 0$*;*

V F (c) il punto improprio di r *è* $[0, 2, -6]$ *.*