10.1) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verifica che sono in posizione generale i punti: $P_1[2,1,4]$, $P_2[0,1,1]$, $P_3[1,3,1]$, $P_4[1,-1,1]$.

b) Determina equazioni per la proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\varphi([1,0,0]) = P_1$, $\varphi([0,1,0]) = P_2$, $\varphi([0,0,1]) = P_3$, $\varphi([1,1,1]) = P_4$.

Soluzione: a) Occorre controllare che i punti non siano a tre a tre allineati, cioè che sia non nullo il determinante delle matrici quadrate aventi per righe (o per colonne) le coordinate omogenee di 3 distinti tra essi. Si denotino con $\vec{p}_1 = (2,1,4)^t$, $\vec{p}_2 = (0,1,1)^t$, $\vec{p}_3 = (1,3,1)^t$ e $\vec{p}_4 = (1,-1,1)^t$ i vettori colonna di coordinate omogenee per P_1, P_2, P_3 e P_4 rispettivamente. Si verifica facilmente che det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3) = -7$, det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_4) = 1$, det $(\vec{p}_1\vec{p}_3\vec{p}_4) = -8$, det $(\vec{p}_2\vec{p}_3\vec{p}_4) = -4$. Si conclude che i punti sono in posizione generale.

b) Cerchiamo la matrice M che rappresenta, rispetto alla base canonica, l'applicazione φ_l associata alla proiettività φ. Le condizioni $\varphi([1,0,0]) = P_1$, $\varphi([0,1,0]) = P_2$, $\varphi([0,0,1]) = P_3$ assicurano che la matrice M sia della forma $M = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & 3\nu \\ 4\lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$ con $\lambda\mu\nu \neq 0$. La condizione $\varphi([1,1,1]) = P_4$ impone che (λ,μ,ν) siano parte di una soluzione (λ,μ,ν,ρ) a entrate non nulle del sistema $\begin{cases} 2\lambda + \nu = \rho \\ \lambda + \mu + 3\nu = -\rho \\ 4\lambda + \mu + \nu = \rho \end{cases}$. In base alla teoria dei sistemi lineari omogenei (e ricordando che l'ultima colonna della matrice dei coefficienti è l'opposto delle coordinate omogenee di P_4), le soluzioni di tale sistema sono tutti e soli i vettori che sono proporzionali a $(\lambda_0,\mu_0,\nu_0,\rho_0)$ ove $\lambda_0 =$ - det $(\vec{p}_2\vec{p}_3\vec{p}_4) = 4$, $\mu_0 =$ det $(\vec{p}_1\vec{p}_3\vec{p}_4) = -8$, $\nu_0 =$ -det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_4) = -1$, $\rho_0 =$ det $(\vec{p}_1\vec{p}_2\vec{p}_3) = -7$. Si ricava la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 \\ 4 & -8 & -3 \\ 16 & -8 & -1 \end{pmatrix}$. La proiettività $\varphi([\vec{X}]) = [\vec{Y}]$ è definita dall'equazione matriciale $\tau\vec{Y} = M\vec{X}$ $(\tau \neq 0)$.

10.2) Nel piano proiettivo numerico $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, considera le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - 2X_2 = 0$ e $s : X_0 + 5X_1 = 0$ rispettivamente. Determina un cambio di coordinate omogenee $[\vec{Y}] = [M\vec{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

Soluzione. Per mostrare che le rette sono distinte, basta controllare che le equazioni omogenee di r e s non siano proporzionali, il che è vero perché rg $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, prendendo i monori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta $H = [det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, -det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}] = [10,-2,5]$.

b) **Primo modo** Si fissi $P_1 = H$ e si scelgano $P_2 \neq P_1$ in r, $P_3 \neq P_1$ in s e P_4 esterno a r e s (in tal modo i punti P_1, P_2, P_3 e P_4 risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di P_1 sia l'intersezione $Q_1[0,0,1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di P_2 sia un punto $Q_2 \neq Q_1$ con $X_2 = 0$, l'immagine di P_3 sia un punto $Q_3 \neq Q_1$ con $X_1 = 0$, l'immagine di P_4 sia un punto Q_4 con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $P_1[10,-2,5] = H$, $P_2[0,1,0]$, $P_3[0,0,1]$ e $P_4[1,1,1]$ siano due punti distinti $Q_1[0,0,1]$, $Q_2[1,0,0]$, $Q_3[0,1,0]$ e $Q_4[1,1,1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [N\mathbf{Y}]$. La matrice N sarà della forma

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10\nu \\ \lambda & 0 & -2\nu \\ 0 & \mu & 5\nu \end{pmatrix} \quad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} 10\nu - \rho = 0 \\ \lambda - 2\nu - \rho = 0 \\ \mu + 5\nu - \rho = 0 \end{cases} .$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = -12$, $\mu_0 = -5$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 10$, di modo che

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -12 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

La matrice M cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di N. Ad esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Secondo modo Il cambio può essere ottenuto scegliendo due punti distinti P_1 e P_2 in r e due punti distinti P_3 e P_4 in s in modo tale che punti P_1, P_2, P_3 e P_4 siano in posizione generale e imponendo che le immagini di P_1 e P_2 siano due punti distinti Q_1 e Q_2 di $Y_2 = 0$, mentre le immagini di P_3 e P_4 siano due punti distinti Q_3 e Q_4 di $Y_1 = 0$ (e assicurandosi che Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 siano in posizione generale). Ad esempio, è possibile scegliere $P_1[2, 0, 1]$, $P_2[0, 1, 0]$, $P_3[5, -1, 0]$ e $P_4[0, 0, 1]$ e $Q_1[1, 0, 0]$, $Q_2[1, 0, 1]$, $Q_3[0, 1, 0]$ e $Q_4[0, 1, 1]$.

10.3) Determina le equazioni di una proiettività non identica $\varphi : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che il punto $P[1, 0, 1]$ sia fisso e la retta r di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia fissa punto a punto.

Soluzione: La retta r è generata dai due punti $A = [1, 0, 0]$ e $B = [0, 1, -1]$. Poniamo $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{e}_3 = (1, 0, 1)$ e definiamo $W =< \vec{e}_1, \vec{v}_2 >$ e $U =< \vec{v}_3 >$. L'applicazione lineare φ_l associata alla proiettività cercata deve essere tale che $\vec{v}_3$ sia un autovettore e W sia contenuto in un autospazio di φ_l. Poichè U e W sono in somma diretta (perchè $P \notin r$) e la loro somma ha dimensione 3, se si vuole che φ non sia l'identità occorre che W coincida esattamente con un autospazio e l'autovalore ad esso relativo sia differente dall'autovalore di $\vec{v}_3$. Ad esempio, possiamo scegliere 1 come autovalore di $\vec{v}_3$ e 2 come autovalore di autospazio W. L'applicazione φ_l è allora individuata dalle condizioni: $\varphi_l(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1$, $\varphi_l(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$, $\varphi_l(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$. Denotando con M la matrice che ha per colonne (nell'ordine) le componenti di $\vec{e}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ in base canonica, risulta che la corrrispondente φ ha matrice A con $A = M \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Osserviamo che scelte diverse degli autovalori avrebbero prodotto proiettività differenti.

10.4) Nella retta proiettiva numerica $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, fissa i punti $A[1,-1]$, $B[2,1]$, $C[1,3]$, $D[3,1]$.

Determina le equazioni del cambio di coordinate omogenee necessario per ottenere il riferimento nel quale A, B, C sono i punti fondamentali e il punto unità. Inoltre, calcola le coordinate omogenee del punto D nel nuovo riferimento.

10.5) Nella retta proiettiva reale, siano $A[1,0]$, $B[0,1]$, $C[1,1]$, $D[d_0,d_1]$.

a) Determina il birapporto $(BACD)$ e confrontalo con $(ABCD)$.

b) Discuti se è possibile che (A,B,C,D) e (B,A,C,D) siano quaterne proiettive.

Soluzione a) $(BACD) = [d_2, d_1]$: si osservi che si sono scambiati i ruoli delle due entrate delle coordinate omogenee.

Per capire cosa è successo, possiamo ragionare come segue. Se considero A come punto improprio, l'insieme $\mathbf{P}^1 \setminus A$ viene identificato con una retta affine tramite la posizione:

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{P}^1 \setminus A & \to & \mathbf{R} \\ [X_1, X_2] & \mapsto & X_1/X_2 = x \end{array}$$

Rifacciamo la stessa procedura assegnando a B le coordinate $[1,0]$, ad A le coordinate $[0,1]$ e a C le coordinate $[1,1]$. Il cambio di coordinate è $\rho Y_1 = X_2$, $\rho Y_2 = X_1$ con $\rho \neq 0$. L'applicazione corrispondente risulta:

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{P}^1 \setminus B & \to & \mathbf{R} \\ [Y_1, Y_2] & \mapsto & Y_1/Y_2 = X_2/X_1 = 1/x. \end{array}$$

c) Le due quaterne sono proiettive se e solo se hanno lo stesso birapporto. Devo chiedermi se esiste $D[d_1,d_2] \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $[d_1,d_2] = [d_2,d_1]$: ciò accade se e solo se $det \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_1 \end{pmatrix} = 0$, cioè se $d_1 = \pm d_2$; ciò corrisponde a due possibili scelte per D: $D_+ = C[1,1]$ oppure $D_-[1,-1]$.

Rivedo l'esercizio in un'altro modo. Determino esplicitamente la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ tale che $\omega(A) = B$, $\omega(B) = A$, $\omega(C) = C$. Ricavo che $\omega([X_1, X_2]) = [X_2, X_1]$, cioè ω è associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora devo scegliere D tale che $\omega(D) = D$: le coordinate (d_1, d_2) devono soddisfare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Dunque come rappresentante delle coordinate di D devo scegliere un autovettore di M. Si verifica facilmente che M è diagonalizzabile e D_+ e D_- corrispondono ad una base di autovettori.

Notare inoltre che $\omega \circ \omega = id$: se compongo ω con se stessa, trovo l'identità (riscambiando i primi due punti, A e B ritornano nella posizione originaria). Si dice che ω è una involuzione.

10.6) Nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2_K$, considera i punti $A[1,0,7]$, $B[2,-1,5]$, $C[4,-3,1]$, $D[3,-1,12]$.

Verifica che i punti A, B, C, D sono allineati e calcola il birapporto $(ABCD)$.

Soluzioni Per controllare che i punti sono allineati, basta osservare che i vettori $(1,0,7)$, $(2,-1,5)$, $(4,-3,1)$, $(3,-1,12)$ generano un sottospazio di dimensione 2 in $\mathbf{R}^3$, che è la retta di equazione

$$det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Uso $(1, 0, 7)$, $(2, -1, 5)$ come base del sottospazio vettoriale corrispondente alla retta e parametrizzo i punti della retta utilizzando questi vettori. Il punto A ha coordinate omogenee $[1, 0]$, mentre B ha coordinate $[0, 1]$. Ricavo $(4, -3, 1) = -2(1, 0, 7) + 3(2, -1, 5)$ e dunque C ha coordinate omogenee $[-2, 5]$. Infine, $(3, -1, 12) = (1, 0, 7) + (2, -1, 5)$, dunque D ha coordinate $[1, 1]$. Ora calcolo il birapporto utilizzando le coordinate omogenee introdotte sulla retta. Ricavo $(ABCD) = [-3, 2] = [3, -2]$.

10.7) Nella retta proiettiva numerica, fissa i punti $A[1, 2]$, $B[3, -1]$, $C[2, 1]$, $D[2, -5]$. Determina il birapporto $(ABCD)$.

10.8) a) In $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, verificare che i seguenti punti sono in posizione generale: $A'[2, 0, 7]$, $B'[2, 1, 1]$, $C'[1, 1, 0]$, $D'[0, 0, 1]$.

b) Determinare la matrice della proiettività $\omega : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $\omega([1, 0, 0]) = A'$, $\omega([0, 1, 0]) = B'$, $\omega([0, 0, 1]) = C'$, $\omega([1, 1, 1]) = D'$.