Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corsi di Laurea in Ingegneria Energetica, Gestionale e Meccanica - Lettere P-Z

Esame di Geometria (Prof. F. Tovena) 2013

Esercizi su spazi vettoriali: esempi, sottospazi, insieme di generatori, indipendenza lineare.

1) Si considerino assegnati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$: $\mathbf{v}_1 = (2,-1,6,5)$, $\mathbf{v}_2 = (4,1,1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,2,0,-1)$.

   a) Determinare le entrate del vettore numerico $3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$.

   b) Discutere l'esistenza di due numeri reali a e b tali che $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, il vettore nullo.

2) Calcolare la seguente combinazione lineare di vettori di $\mathbf{R}^4$:

$$4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Calcolare la seguente combinazione lineare di matrici con 2 righe e 3 colonne:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Controllare se il seguente sistema in due incognite ammette una unica soluzione

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

5) Discutere se $(2,0,-3)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $\mathbf{v} = (6,0,2)$ e $\mathbf{w} = (1,0,1)$.

6) In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori seguenti:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Controlla se i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti.

   b) Controlla se Span $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) =$ Span $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

   c) Determina i coefficienti della combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ uguale a $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

7) Nel piano euclideo, considera i punti P, Q, R come nella figura. Disegna $2\vec{PQ}$, $-\vec{PQ}$, $\vec{PQ} + \vec{PR}$, $\vec{PQ} - \vec{PR}$, $\vec{PQ} - 2\vec{PR}$.

Soluzioni

1) a) $3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 = 3(2,-1,6,5) - 2(4,1,1,-1) + 3(0,2,0,-1) = (6,-3,18,15) + (-8,-2,-2,2) + (0,6,0,-3) = (-2,1,16,14)$.

b) Osservo che $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ se e solo se $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ è soluzione del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2a + 4b = 0 \\ -a + b = 0 \\ 6a + b = 0 \\ 5a - b = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ottenuto uguagliando ordinatamente le entrate di $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$ e di $\mathbf{0}$. Poiché il sistema (1) ammette solo la soluzione nulla, si deduce che $a = 0, b = 0$ è l'unica coppia di numeri reali tali che $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

2)
$$4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ -24 \\ 11 \end{pmatrix}$$

3)
$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

4) Il sistema da studiare è un sistema quadrato. Esso ammette una unica soluzione se e solo se è un sistema di Cramer, cioè se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo. Poiché il determinante di

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

è non nullo (e, infatti, le righe della matrice dei coefficienti non sono l'una multipla dell'altra), concludo che il sistema ammette una unica soluzione.

5) Il vettore $\mathbf{u} = (2,0,-3)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $\mathbf{v} = (6,0,2)$ e $\mathbf{w} = (1,0,1)$ se e solo se $\mathbf{u}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cioè esistono $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v} + a_2\mathbf{w}$. Poiché $a_1\mathbf{v} + a_2\mathbf{w} = a_1\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, l'esistenza dei coefficienti cercati a_1, a_2 equivale all'esistenza di una soluzione per il sistema $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, cioè del sistema $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$: ma questo è un sistema di Cramer (matrice dei coefficienti

quadrata con determinante non nullo) e ammetta una e una sola soluzione. Dunque $\mathbf{u}$ appartiene al sottospazio generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Risolvendo il sistema, possiamo trovare esplicitamente i coefficienti a_1, a_2 della combinazione lineare.

6) In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori seguenti:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Controlla se i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti.

b) Controlla se Span $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) =$ Span $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

c) Determina i coefficienti della combinazione lineare di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ uguale a $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. c) Risolvo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e trovo che $\mathbf{u} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$