PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2, MATEMATICA, 05/09/2013

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0. Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritte come vettori righe.

Test 1. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(2-i,-1+i)$.

V F (a) per P passa una sola retta reale;
V F (b) la retta per P e per $Q(5-i,-1-2i)$ è isotropa;
V F (c) la retta per P ortogonale alla retta $3x_1+ix_2-2=0$ è la retta di equazione $ix_1-3x_2+4-i=0$.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni

$$x_1-2x_2+2+i=0, x_1+2x_3-6-i=0.$$

V F (a) la retta r è reale;
V F (b) la retta r e la sua coniugata $\overline{r}$ sono complanari;
V F (c) la retta r ha un punto reale.

Test 3. Considera l'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita da $f(x_1,x_2,x_3)=(8x_1+2x_2-x_3,-18x_1-4x_2+3x_3,2x_3)$. Considera inoltre l'omotetia ω_2 di rapporto 2 in $\mathbb{R}^3$.

V F (a) il vettore $(-1,3,0)$ è un autovettore per f;
V F (b) la massima dimensione di un autospazio per f è 2;
V F (c) f è diagonalizzabile;
V F (d) $f-\omega_2$ è nilpotente.

Test 4. Nello spazio vettoriale $V=\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata x e di grado ≤ 4, considera il sottospazio U dei polinomi che si annullano in 1 e in 2.

V F (a) esiste una applicazione lineare suriettiva $g: V/U\to\mathbb{R}^3$;
V F (b) i polinomi x e x^3 rappresentano la stessa classe in V/U;
V F (c) le classi $[x]$, $[4+2x^2]$ sono linearmente indipendenti in V/U.

Test 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, considera la base $\mathcal{B}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0)$ e U il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$. Denota con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ la base duale.

V F (a) $(2e_1^* + e_2^* + 3e_3^*)(\mathbf{v}_3) = 1$;
V F (b) l'annullatore di U contiene $-3e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^*$;
V F (c) la base duale di $\mathcal{B}$ è $\mathbf{f}_1 = e_1^* + e_2^*$, $\mathbf{f}_2 = -e_1^* - e_2^* + e_3^*$, $\mathbf{f}_3 = -e_2^*$.

Test 6. Nella retta proiettiva numerica reale $\mathbb{P}^1$, considera i punti $A[1,1]$, $B[2,1]$, $C[-3,2]$, $D[3,5]$.

V F (a) i punti A, B, C sono indipendenti;
V F (b) esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ in sè tale che l'immagine di A, B siano punti fondamentali e l'immagine di D sia il punto unità;
V F (c) il birapporto $(ABCD)$ è $[5,2]$.

Test 7. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x,y) \mapsto [1,x,y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $2x - 6y + 3 = 0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $3x_0 + 2x_1 - 6x_2 = 0$;
V F (c) il punto improprio di r è $[0,2,-6]$.

Test 8. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ contiene la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$;
V F (b) la conica Γ ha rango 2;
V F (c) il punto $P[1,1,-1]$ è doppio per Γ.

Test 9. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2 - 2x - y - 3 = 0$:

V F (a) è una parabola con vertice nel punto $(1,-4)$;
V F (b) è una parabola con fuoco nel punto $(1,-15)$;
V F (c) è una parabola con asse di simmetria $x = 1$.

Test 10. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$:

V F (a) è una conica non degenere;
V F (b) è una circonferenza di centro nell'origine;
V F (c) è tangente alla retta di equazione $\sqrt{3}x - 2y - 4 = 0$.
V F (d) ha per diametro la retta $x - 2y = 0$.