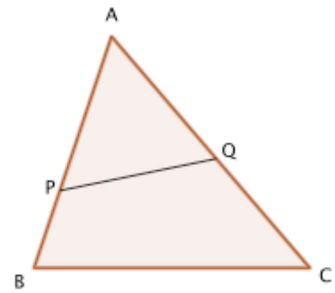
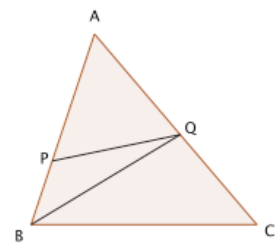
Teorema di Talete

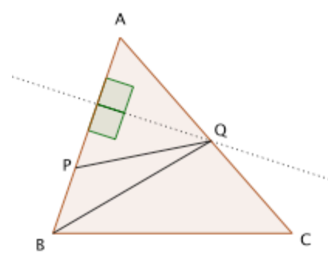
Consideriamo un triangolo ABC come in figura e tracciamo un segmento PQ che congiunge un punto P sul lato AB con un punto Q sul lato AC.



Congiungiamo Q con B.



Consideriamo i triangoli APQ e PBQ. L'altezza di APQ rispetto alla base AP è uguale all'altezza di PBQ rispetto alla base PB.

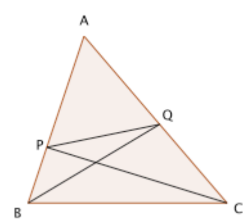


Poichè i triangoli APQ e PBQ hanno la stessa altezza, devono avere le aree proporzionali alle loro basi rispettive:

(*) $$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PBQ} = \frac{AP}{PB}\ .$$

Ora congiungiamo P con C (post. 1)

Analogamente a prima, i triangoli APQ e PCQ hanno la stessa altezza rispetto alle basi AQ e QC, rispettivamente. Le aree dei triangoli APQ e PCQ sono quindi proporzionali alle rispettive basi:



$$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PCQ} = \frac{AQ}{QC} \qquad (**)$$

Sia in (*) che in (**) il rapporto a sinistra studia la relazione tra l'area di APQ e quella di un altro triangolo. Affinché i rapporti in (*) e in (**) siano uguali, occorre e basta che *area* PQB = *area* PCQ. Dunque

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } area \text{ PQB} = area \text{ PCQ} . \qquad (***)$$

Teorema di Talete

Una retta parallela ad un lato di un triangolo taglia gli altri due lati del triangolo in modo proporzionale. Viceversa, se una retta taglia due lati di un triangolo in modo proporzionale, allora è parallela al terzo lato del triangolo.

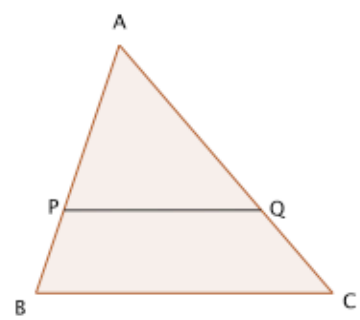
Possiamo anche riscrivere l'enunciato nella forma

$$(1) \qquad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \text{ se e solo se } PQ \parallel BC.$$

Dimostrazione

Ora dedichiamoci alla dimostrazione della prima affermazione nell'enunciato.

Supponiamo che il segmento PQ sia parallelo al lato BC, come in figura.



Vogliamo dimostrare che

AP : PB = AQ : QC, cioè

$$(1) \qquad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}.$$

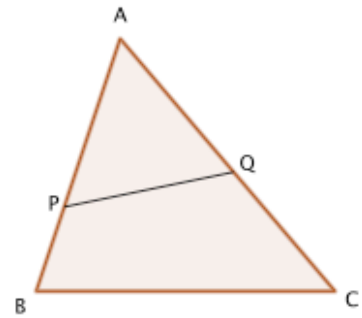
Ora, il secondo membro dell'uguaglianza (**) è uguale al secondo membro dell'uguaglianza (1) che vogliamo dimostrare. Dunque, per (***) dimostrare l'equazione (1) equivale a dimostrare che:

$$\frac{area \;\; APQ}{area \;\; PBQ} = \frac{area \;\; APQ}{area \;\; PCQ} \text{ , cioè che } area \;\; PBQ = area \;\; PCQ.$$

Consideriamo quindi i due triangoli PBQ e PCQ. Essi hanno in comune il lato PQ; considerando questo lato come base, i due triangoli hanno la stessa altezza, perchè la base PQ e il segmento BC sono paralleli. Ma allora, avendo la base in comune, e la stessa altezza, i due triangoli PBQ e PCQ hanno le aree uguali, e la tesi della prima affermazione è dimostrata.

Ora passiamo a dimostrare la seconda affermazione.

Questa volta, supponiamo che supponiamo che AP : PB = AQ : QC, cioè $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.



Esattamente come nella dimostrazione della prima affermazione, sappiamo che le uguaglianze (*) e (**) sono vere. Grazie all'ipotesi, possiamo concludere che

$$\frac{area\ \ APQ}{area\ \ PBQ} = \frac{area\ \ APQ}{area\ \ PCQ}\ ,$$

e quindi che *area* PBQ= *area* PCQ.

Poichè i due triangoli PBQ e PCQ hanno la stessa base e la stessa area, devono avere altezze uguali.

Dunque, la distanza di B dalla retta r per P e Q è uguale alla distanza di C da r: il segmento PQ è quindi parallelo a BC. ♣

Corollario Mantenendo le notazioni del teorema, se PQ||BC, si ha che $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.