6

Dualità e spazi proiettivi

6.1 Spazio proiettivo duale

Definizione 6.1.1. Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, lo *spazio vettoriale duale* di $\mathbf{V}$ si denota con $\mathbf{V}^\star$ ed è costituito da

$$\mathbf{V}^\star = Hom(\mathbf{V}, \mathbb{K}) = \{f | f : \mathbf{V} \to \mathbb{K}, f \text{ applicazione lineare}\}$$

dotato della struttura di spazio vettoriale definita dalla somma puntuale:

$$\begin{aligned} &(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}), \\ &(af)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}), \quad \forall f, g \in \mathbf{V}^\star,\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},\ \forall a \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}^*$ ha la stessa dimensione (finita) di $\mathbf{V}$. Fissando $\{1_\mathbb{K}\}$ come base di $\mathbb{K}$, ogni scelta di un riferimento R in $\mathbf{V}$ permette di identificare $\mathbf{V}^\star$ con lo spazio vettoriale delle matrici con 1 riga e tante colonne quanta è la dimensione di $\mathbf{V}$, associando a $f \in \mathbf{V}^\star$ la matrice $M_R(f)$ che rappresenta f rispetto al riferimento R.

Definizione 6.1.2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\star)$ si dice *spazio proiettivo duale* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e si denota con i simboli $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ o $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$.

Uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ed il suo duale $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ hanno quindi la stessa dimensione. Pur essendo spazi proiettivi differenti, $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ sono legati tra loro. Per studiare meglio questa relazione, cerchiamo di interpretare geometricamente i punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Denotiamo con $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Costruiamo una applicazione biettiva naturale:

$$\eta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$$

nel modo seguente. Se $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, il sottospazio $\mathbf{W}$ ha codimensione 1 in V ed esiste almeno una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ non nulla tale che Ker $f = \mathbf{W}$; inoltre, due siffatte applicazioni lineari f e f' sono necessariamente proporzionali, cioè esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $f' = \lambda f$. Dunque ha senso definire

$$\eta(\mathbf{H}) = [f], \qquad \text{se } \mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \text{ e } f \in \mathbf{V}^* \text{ è tale che Ker } f = \mathbf{W},$$

dove $[f]$ è la classe di proporzionalità di f in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. L'applicazione η così definita è biettiva (controlla!), e la sua inversa è data da:

$$\eta^{-1}([f]) = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \quad \text{posto } \mathbf{W} = Ker f.$$

Mediante l'applicazione η possiamo quindi identificare $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ con $\mathcal{H}$, cioè *interpretare i punti dello spazio duale* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ *come gli iperpiani dello spazio* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Esempio 6.1.3. Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^{n+1}$, è possibile fissare come riferimento R in $\mathbf{V}$ il riferimento canonico E; grazie a tale scelta, ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ allora $\mathbf{V}^\star$ può essere identificata in modo naturale con $M_E(f) \in \mathbb{K}^{n+1}$; un elemento $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ viene identificato così con una $(n+1)$-pla ordinata di scalari $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$, con la condizione che $f(\mathbf{X}) = u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$.

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1\star})$ si denota con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n\vee}$ e prende il nome di *spazio proiettivo numerico duale* di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$.

Denotiamo, come prima, con $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$. Come visto nell'Esempio 5.3.1, ogni iperpiano $\mathbf{H}$ può essere definito da una equazione lineare omogenea non nulla $u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n = 0$ individuata a meno di multiplo per una costante non nulla. Dunque, $\mathbf{H}$ è il sottospazio proiettivo corrispondente al nucleo $\mathbf{W}$ della forma lineare $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ definita da $f(\mathbf{X}) = u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$. I coefficienti dell'equazione omogenea di $\mathbf{H}$ individuano dunque il punto di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n\vee}$ corrispondente ad $\mathbf{H}$:

$$\eta(\mathbf{H}) = [u_0, u_1, \ldots, u_n] \text{ se } \mathbf{H} \text{ ha equazione omogenea } u_0X_0+u_1X_1+\ldots+u_nX_n = 0.$$

Inoltre, fissato un riferimento proiettivo $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \to \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, possiamo considerare l'applicazione:

$$\varphi^\vee : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \to \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n\,\vee}$$

così definita: al punto $[u_0, \ldots, u_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ la $\varphi^\vee$ associa l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente nel riferimento φ equazione data da: $u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0$. Questa applicazione è ben definita, in quanto se la $n+1$-pla $(u_0, \ldots, u_n)$ varia per proporzionalità, non cambia l'iperpiano definito dalla corrispondente equazione omogenea. Si verifica facilmente che l'applicazione $\varphi^\vee$ è una proiettività e determina un riferimento in $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n\,\vee}$, che si dice *riferimento duale* di φ; le coordinate relative al riferimento duale sono dette *coordinate duali* o *coordinate pluckeriane*.

Fissato un riferimento proiettivo $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, possiamo considerare l'applicazione:

$$\varphi^\vee : \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$$

così definita: al punto $[u_0, \ldots, u_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$ la $\varphi^\vee$ associa l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente nel riferimento φ equazione data da:

$$u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0 \tag{6.1}$$

Proposizione 6.1.4. *L'applicazione $\varphi^\vee$ è una proiettività, e dunque determina un riferimento in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$, chiamato* riferimento duale *di φ.*

Dimostrazione. Sia $\psi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbf{V}$ l'applicazione lineare associata a φ. La ψ è determinata da un riferimento $R = (\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$. Sia $R^\star = (\mathbf{v}_0^\star, \ldots, \mathbf{v}_n^\star)$ il riferimento duale di R (cfr. [1], capitolo 12, n. 3). Consideriamo l'isomorfismo $\psi^\star : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbf{V}^\star$ determinato da $R^\star$. Proviamo che la proiettività associata a $\psi^\star$ coincide con la $\varphi^\vee$.

Infatti se $[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, la proiettività associata a $\psi^\star$ manda $[a_0, \ldots, a_n]$ nel punto $[a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Interpretando questo punto come un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, esso è proprio l'iperpiano $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ dove $\mathbf{W}$ è il nucleo della applicazione lineare $a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star$. Quindi un punto $[X_0\mathbf{v}_0 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se:

$$(a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star)(X_0\mathbf{v}_0 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n) = a_0X_0 + \ldots + a_nX_n = 0$$

Ciò prova che $\mathbf{H}$ è proprio l'iperpiano avente in φ equazione data da (6.1). □

Osservazione 6.1.5. L'introduzione delle coordinate duali in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ permette di rappresentare abbastanza semplicemente le stelle di iperpiani: se $\mathbf{Z}$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, la *stella di iperpiani di asse o centro* $\mathbf{Z}$ è l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti $\mathbf{Z}$, che viene denotato con $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$. La stella è *vuota* se $\mathbf{Z} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, si riduce ad un unico elemento se $\mathbf{Z}$ stesso è un iperpiano, prende il nome di *fascio di asse o centro* $\mathbf{Z}$ se $\mathbf{Z}$ ha codimensione 2.

Consideriamo un sottospazio $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente in φ equazioni date da:

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + \ldots + u_{0,n}X_n = 0 \\ \ldots \\ u_{m0}X_0 + \ldots + u_{m,n}X_n = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

Supponiamo, com'è lecito, che il sistema (6.2) sia normale, ossia che $\mathbf{Z}$ abbia dimensione $n - m - 1$. Le equazioni (6.2) definiscono allora $m + 1$ iperpiani indipendenti della stella $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ e tutti e soli gli iperpiani della stella dipendono linearmente da essi. In altri termini un iperpiano $\mathbf{H}$ appartiene a $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ se e solo se ha in φ equazione del tipo:

$$\lambda_0(u_{00}X_0 + \ldots + u_{0,n}X_n) + \ldots + \lambda_m(u_{m0}X_0 + \ldots + u_{m,n}X_n) = 0$$

con $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tutti nulli. Dunque un iperpiano $\mathbf{H}$ di coordinate duali $[u_0, \ldots, u_n]$ appartiene a $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ se e solo se esistono $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tutti nulli con

$$(u_0, \ldots, u_n) = \lambda_0(u_{00}, \ldots, u_{0,n}) + \ldots + \lambda_m(u_{m0}, \ldots, u_{m,n});$$

ciò equivale a dare una rappresentazione parametrica di $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ nelle coordinate duali $\varphi^\vee$.

Formalizziamo quanto abbiamo scoperto:

Proposizione 6.1.6. *Per ogni sottospazio proiettivo* $\mathbf{Z}$ *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*, la stella* $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ *è un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ *e ha dimensione proiettiva*

$$\dim \mathcal{H}(\mathbf{Z}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathbf{Z} - 1.$$

Dimostrazione. Ricordiamo da [1], capitolo 12, n. 5, l'applicazione biettiva:

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbf{V}) \to \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star)$$

tra l'insieme $\mathcal{S}(\mathbf{V})$ dei sottospazi di $\mathbf{V}$ e quello dei sottospazi di $\mathbf{V}^\star$, definita associando al sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ il sottospazio

$$\delta(\mathbf{W}) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}) = \{f \in \mathbf{V}^\star : \ \mathrm{Ker}\ f \supseteq \mathbf{W}\}.$$

Se $\mathbf{Z}$ è associato al sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$, allora $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ risulta associato a $\delta(\mathbf{W}) \subset \mathbf{V}^\star$. □

Esempio 6.1.7. Se $\mathbf{Z}$ è composto da un unico punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ di coordinate omogenee $[p_0, \dots, p_n]$ in φ, la stella $\mathcal{H}(P)$ è costituita da tutti e soli gli iperpiani aventi in φ equazione $u_0X_0 + \dots + u_nX_n = 0$ tale che

$$u_0p_0 + \dots + u_np_n = 0 \tag{6.3}$$

Poiché $[u_0, \dots, u_n]$ sono coordinate omogenee degli iperpiani in $\varphi^\vee$, la (6.3) può essere interpretata come l'equazione in $\varphi^\vee$ della stella $\mathcal{H}(P)$; più precisamente, $\mathcal{H}(P)$ *può essere interpretato come un iperpiano di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$.

Esempio 6.1.8. n=1 Nel caso della retta proiettiva numerica $\mathbb{P}^1_\mathbb{K}$, gli iperpiani sono i punti e quindi $\mathbb{P}^1_\mathbb{K}$ coincide con la retta duale $\mathbb{P}^{1\vee}_K$. Se il P ha coordinate $[a, b]$ in un riferimento φ di $\mathbb{P}^1_\mathbb{K}$, lo stesso punto$P$, in quanto iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, ha in φ equazione $bX_0 - aX_1 = 0$. Quindi P ha nel riferimento duale $\varphi^\vee$ coordinate $[b, -a]$.

n=2 Sia φ un riferimento di $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ e siano r e r' due rette distinte di $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ di equazioni $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$, $u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 = 0$ in φ. Le rette del fascio $\mathcal{F}$ determinato da r e r' sono tutte e sole le rette aventi in φ equazioni del tipo $\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2) = 0$, con λ e μ non entrambi nulli. Le rette di $\mathcal{F}$ corrispondono biunivocamente ai punti $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_\mathbb{K}$ nell'applicazione che a $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_\mathbb{K}$ associa la retta avente in φ equazione $\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2) = 0$. Questa applicazione determina un riferimento proiettivo nel fascio $\mathcal{F}$. Dato un punto P di $\mathbb{P}^2_\mathbb{K}$ avente in φ coordinate $[p_0, p_1, p_2]$ il fascio di rette $\mathcal{H}(P)$ di centro P ha in $\varphi^\vee$ equazione $p_0u_0 + p_1u_1 + p_2u_2 = 0$, dove $[u_1, u_2, u_3]$ sono le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{2\vee}_\mathbb{K}$.

Dunque ci sono corrispondenze biunivoche naturali:

$$\{\textit{rette di } \mathbb{P}^2_\mathbb{K}\} \leftrightarrow \{\textit{punti di } \mathbb{P}^{2\vee}_\mathbb{K}\};$$
$$\{\textit{punti di } \mathbb{P}^2_\mathbb{K}\} \leftrightarrow \{\textit{rette di } \mathbb{P}^{2\vee}_\mathbb{K}\}.$$

Osservando che anche $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ è uno spazio proiettivo, è possibile considerarne il duale: i punti di $(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee)^\vee = \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ possono essere interpretati come iperpiani dello spazio duale $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Ma vedremo subito che $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ *può essere identificato in modo naturale con* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$:

Proposizione 6.1.9. *Interpretando la stella $\mathcal{H}(P)$ come un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) &\to \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star}) \\ P \; &\mapsto \mathcal{H}(P). \end{aligned}$$

è un isomorfismo, detto isomorfismo naturale *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *su* $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mathbf{V}^{\star\star}$ è naturalmente isomorfo a $\mathbf{V}$ (cfr. [1], capitolo 12, n. 4) e l'isomorfismo naturale

$$\Psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\star\star}$$

è così definito: ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si associa l'elemento $\mathbf{v}^{\star\star} \in \mathbf{V}^{\star\star}$ tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\star\star} : \mathbf{V}^\star &\to \mathbb{K} \\ f \; &\mapsto f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

L'applicazione Φ coincide con la proiettività associata a Ψ; infatti, se $P = [\mathbf{v}]$ è un punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, il punto $[\mathbf{v}^{\star\star}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ è l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ definito da

$$\mathbf{H}^\vee = \{[f] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee : \mathbf{v}^{\star\star}(f) = f(\mathbf{v}) = 0\}$$

Ma, interpretando i punti $[f]$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ come iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, vediamo che

$$\mathbf{H}^\vee = \{\pi \in \mathcal{H} : P \in \pi\} = \mathcal{H}(P)$$

e ciò prova che l'isomorfismo associato a Ψ coincide proprio con la Φ. □

Osserviamo esplicitamente che l'applicazione inversa della Φ è così definita: ad ogni iperpiano α di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$, che corrisponde a una stella di iperpiani di centro un punto P, la Φ^{-1} associa il centro P della stella, che non è altro che l'intersezione di tutti gli iperpiani della stella; dunque:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star}) &\to \mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \alpha &\mapsto P = \cap_{\mathbf{H} \in \alpha} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Riassumendo: denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})$ l'insieme di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e analoga notazione usiamo per i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Nasce così l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee) \\ \mathbf{Z} &\mapsto \mathcal{H}(\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Teorema 6.1.10. *L'applicazione $\mathcal{H}$ è biettiva e la sua inversa, che denotiamo con $\mathcal{H}^\vee$, è così definita: ad ogni sottospazio $\mathbf{Z}^\vee$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$, che può essere interpretato come una stella di iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $\mathcal{H}^\vee$ associa il suo centro $\mathbf{Z}$ che è l'intersezione di tutti gli iperpiani della stella $\mathbf{Z}^\vee$, ossia:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\vee : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \\ \mathbf{Z}^\vee &\mapsto \mathbf{Z} = \cap_{\mathbf{H} \in \mathbf{Z}^\vee} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

L'applicazione $\mathcal{H}$ gode delle seguenti proprietà:

(a) per ogni coppia di sottospazi $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ tali che $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}'$, si ha $\mathcal{H}(\mathbf{Z}) \supseteq \mathcal{H}(\mathbf{Z}')$;

(b) per ogni sottospazio $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si ha

$$\dim \mathcal{H}(\mathbf{Z}) = n - \dim \mathbf{Z} - 1 \tag{6.4}$$

(l'espressione che compare a secondo membro della precedente formula si dice dimensione duale *della dimensione di $\mathbf{H}$);*

(c) per ogni coppia di sottospazi $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{Z}') &= \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \vee \mathcal{H}(\mathbf{Z}') \\ \mathcal{H}(\mathbf{Z} \vee \mathbf{Z}') &= \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{Z}') \end{aligned} \tag{6.5}$$

(d) $\mathcal{H}^\vee$ gode di analoghe proprietà.

Dimostrazione. Accanto alla applicazione $\delta : \mathcal{S}(\mathbf{V}) \to \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star)$ già ricordata nella dimostrazione della Proposizione 6.1.9, ci servirà anche [cfr. [1], capitolo 12, n. 5] l'applicazione:

$$\delta^\star : \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star) \to \mathcal{S}(\mathbf{V})$$

che associa ad ogni sottospazio $\mathbf{W}^\star$ di $\mathbf{V}^\star$ il sottospazio $\delta^\star(\mathbf{W}^\star)$ di $\mathbf{V}$ intersezione dei nuclei di tutti gli elementi di $\mathbf{W}^\star$. L'applicazione $\mathcal{H}^\vee$ può essere definita anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\vee : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})\\ \mathbb{P}(\mathbf{W}^\star) &\mapsto \mathbb{P}(\delta^\star(\mathbf{W}^\star))\end{aligned}$$

mentre, come visto, la $\mathcal{H}$ si può definire come:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee)\\ \mathbb{P}(\mathbf{W}) &\mapsto \mathbb{P}(\delta(\mathbf{W})).\end{aligned}$$

Ora, poiché δ e $\delta^\star$ sono una inversa dell'altra (cfr. [1], proposizione (12.9), (c)), ne segue subito che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\vee$ sono anche esse una inversa dell'altra. Inoltre le proprietà (a), (b), (c) e (d) sono conseguenze immediate della già citata proposizione (12.9) di [1]. □

Esempio 6.1.11. Un iperpiano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ è un piano; se ha equazione $u_0X_0+u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3 = 0$ in un riferimento φ di $\mathbb{P}^3_K$, un piano ha per coordinate omogenee in $\varphi^\vee$ proprio $[u_0, u_1, u_2, u_3]$. Come visto nell'Esempio 6.1.7, la stella di piani per un punto $P[\mathbf{p}]$ può essere interpretata come un piano di $\mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}$, definito dall'equazione: $p_0u_0 + p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 = 0$: denotiamo con α_P tale piano di $\mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}$. Osserviamo che il punto P risulta essere l'intersezione di tutti i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ rappresentati in $\mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}$ da un punto di α_P. Se una retta r ha in φ equazioni:

$$\begin{cases} u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0\\ u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3 = 0\end{cases}$$

il fascio di piani di asse r è costituito da tutti e soli i piani aventi in φ equazione del tipo:

$$\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3) = 0$$

con $[\lambda, \mu]$ coordinate omogenee nel fascio. D'altra parte, se $P[\mathbf{p}]$ e $Q[\mathbf{q}]$ sono due punti distinti di r, allora i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ che contengono r sono esattamente quelli che contengono sia P che Q. Ricordando che un punto di $\mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}$ rappresenta un piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, si ricava che un punto $\mathbf{u}$ di $\mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}$ rappresenta un piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ contenente r se e solo se $\mathbf{u} \in \alpha_P \cap \alpha_Q$.

Una retta di $\mathbb{P}^{3\vee}_K$ si interpreta dunque come fascio di piani di $\mathbb{P}^3_K$ avente come centro una retta di $\mathbb{P}^3_K$, un piano di $\mathbb{P}^{3\vee}_K$ si interpreta come una stella di piani di $\mathbb{P}^3_K$ di centro un punto di $\mathbb{P}^3_K$.

Dunque ci sono corrispondenze biunivoche naturali:

$$\{\textit{piani di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{punti di } \mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}\};$$
$$\{\textit{rette di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{rette di } \mathbb{P}^{3\vee}_{\mathbb{K}}\}.$$
$$\{\textit{punti di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{piani } \mathbb{P}^{2\vee}_{\mathbb{K}}\}.$$

Il precedente teorema consente di mostrare un teorema di dualità per gli spazi proiettivi simile a quello ottenuto in [1], capitolo 12, n. 5, per gli spazi vettoriali.

Sia infatti $\mathfrak{P}$ una proposizione relativa ai sottospazi di uno spazio proiettivo di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, e che riguardi le loro intersezioni, i loro spazi congiungenti e le loro dimensioni: una tale proposizione si dice una *proposizione di carattere grafico*. Diremo *proposizione duale* di $\mathfrak{P}$ la proposizione $\mathfrak{P}^\vee$ ottenuta dalla $\mathfrak{P}$ sostituendo in essa alle parole "spazio intersezione", "spazio congiungente", "contenuto", "contenente", "dimensione" rispettivamente le parole "spazio congiungente", "spazio intersezione", "contenente", "contenuto", "dimensione duale". Vale il:

Teorema 6.1.12. (Principio di dualità per gli spazi proiettivi.) *Una proposizione $\mathfrak{P}$ di carattere grafico è vera se e solo se è vera la duale $\mathfrak{P}^\vee$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 12.11 di [1]. Se $\mathfrak{P}$ è vera per ogni spazio vettoriale, è vera in particolare anche in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Applicando allora la $\mathcal{H}^\vee$ e tenendo conto del teorema 6.1.10, si vede che $\mathfrak{P}^\vee$ è vera in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Analogamente se $\mathfrak{P}^\vee$ è vera allora è vera anche $(\mathfrak{P}^\vee)^\vee = \mathfrak{P}$. □

Esempio 6.1.13. Consideriamo la seguente proposizione $\mathfrak{P}$ concernente rette di uno spazio proiettivo di dimensione 3:

$\mathfrak{P}$: siano r e r' due rette sghembe di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 3 su $\mathbb{K}$ e sia P un punto che non appartiene a nessuna delle due rette; esiste allora una e una sola retta r'' passante per P e complanare con ciascuna delle rette r e r'.

La dimensione duale di 1 in uno spazio di dimensione 3 è ancora 1, ossia, come si dice, il concetto di retta è *autoduale* in uno spazio di dimensione 3. Così pure è autoduale il concetto di rette sghembe (o di rette complanari). Infatti due rette sono sghembe se e solo se hanno intersezione vuota e il concetto duale è quello di due rette il cui spazio congiungente è tutto lo spazio di dimensione 3, il che accade se e solo se le rette hanno ancora intersezione vuota. Da tutto ciò segue che la duale di $\mathfrak{P}$ è la proposizione:

$\mathfrak{P}^\vee$) siano r e r' due rette sghembe di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 3 su $\mathbb{K}$ e sia π un iperpiano che non contiene né r né r'; esiste allora una e una sola r'' contenuta in π e complanare con ciascuna delle rette r e r'.

La proposizione $\mathfrak{P}^\vee$ è vera e di facile verifica: r'' è la retta congiungente i punti $\pi \cap r$ e $\pi \cap r'$.

Ne segue che anche $\mathfrak{P}$ è vera. Una dimostrazione diretta di $\mathfrak{P}$ può essere ottenuta dualizzando la dimostrazione di $\mathfrak{P}^\vee$. In questo caso la retta r'' si ottiene come intersezione dei due piani $P \vee r$ e $P \vee r''$.

Definizione 6.1.14. Un triangolo di $\mathbb{P}^2(K)$ è formato da tre punti A, B, C distinti e non allineati e tre rette $a = B \vee C$, $b = A \vee C$, $c = A \vee B$ e si denota con (A, B, C, a, b, c).

Teorema 6.1.15. (Desargues) *In $\mathbb{P}^2(K)$, siano dati due triangoli (A, B, C, a, b, c) e (A', B', C', a', b', c'), formati da punti e rette tra loro distinti. Allora le rette $A \vee A'$, $B \vee B'$, $C \vee C'$ si intersecano in un punto comune, se e solo se i punti $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$, $R = c \cap c'$ sono allineati.*

Dimostrazione. Mostrata una delle due implicazioni, l'implicazione inversa segue per dualità.

E' dunque sufficiente mostrare che: se i punti $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$, $R = c \cap c'$ sono allineati, allora $(A \vee A') \cap (B \vee B') \cap (C \vee C')$ è un punto.

I punti P, Q, A, B sono in posizione generale e dunque esiste una ed una sola proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ tale che $\varphi(P) = P$, $\varphi(Q) = Q$, $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$. Posto

$$T = (A \vee A') \cap (B \vee B') \qquad S = (B \vee B') \cap (C \vee C'), \tag{6.6}$$

la tesi equivale a mostrare che $T = S$.

Si verifica facilmente che l'applicazione φ gode delle seguenti proprietà:

a) Per ogni $M \in P \vee Q$, si ha $\varphi(M) = M$: basta infatti mostrare che $\varphi(R) = R$ perché in tal caso la proiettività indotta da φ su $P \vee Q$ ha tre punti fissi e coincide quindi con l'identità. Ora, $R \in P \vee Q$ e dunque $\varphi(R) \in \varphi(P) \vee \varphi(Q) = P \vee Q$. D'altra parte, poiché $R \in A \vee B$, $\varphi(R) \in \varphi(A) \vee \varphi(B) = A' \vee B' = c'$. Se ne conclude che $\varphi(R) = P \vee Q \cap c' = R$.
b) $\varphi(C) = C'$: si ricava ragionando in modo analogo al punto precedente avendo osservato che $C = (A \vee Q) \cap (B \vee P)$ e $C' = (A' \vee Q) \cap (B' \vee P)$.
c) $\varphi(T) = T$: per quanto mostrato nel primo passo, il punto $M_1 = (A \vee A') \cap (P \vee Q)$ è fisso per φ. Poiché $T \in A \vee A' = A \vee M_1$, l'immagine $\varphi(T)$ deve appartenere a $A' \vee M_1 = A \vee A'$. Ragionando in modo analogo sulla retta $B \vee B'$ si ricava che $\varphi(T) \in B \vee B'$, e dunque la tesi.
d) $\varphi(S) = S$: completamente analogo al precedente.

Si supponga ora per assurdo che sia $T \neq S$, cioè $T \vee S = B \vee B'$. Sia $M_2 = (B \vee B') \cap (P \vee Q)$. Se M_2 fosse distinto da T e da S, si avrebbe subito un assurdo perchè la proiettività indotta da φ di $B \vee B'$ su sè stessa avrebbe tre punti fissi pur mandando B su $B' \neq B$.

Se $M_2 = T$, la retta $A \vee S$ interseca $P \vee Q$ in un punto H distinto da S. Poiché il punto H è fisso per φ, la retta $A \vee S = H \vee S$ viene mutata in sè stessa da φ: ne segue un assurdo, perché in tal caso $A' = \varphi(A)$ sarebbe allineato con A ed S, cioè $S \in A \vee A'$, contro l'ipotesi $S \neq T$.

L'ultimo caso da considerare è il caso $M_2 = S$: ma motivazioni analoghe a quelle appena viste comporterebbero che $T \in C \vee C'$, che è impossibile. □

Esempio 6.1.16. **Proiettività indotta tra spazi duali.** Siano $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ spazi vettoriali aventi la stessa dimensione finita $n + 1$.

Proposizione 6.1.17. *Ogni proiettività $\psi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{W})$ induce una proiettività tra gli spazi duali $\psi^\vee : \mathbb{P}(\mathbf{W})^\vee \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$. Identificando i punti degli spazi duali con gli iperpiani degli spazi originali, si ha:*

$$\psi^\vee(\mathbb{P}(\mathbf{U})) = \mathbb{P}(\psi_l^{-1}(\mathbf{U})) \tag{6.7}$$

se ψ_l è l'applicazione lineare associata a ψ. In particolare,

a) se ψ induce una proiettività di un iperpiano α in sè (cioè $\psi(\alpha) \subset \alpha$), l'iperpiano α corrisponde ad un punto fisso per $\psi^\vee$.

$$\psi(\alpha) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \psi^\vee(\alpha) = \alpha; \tag{6.8}$$

b) se ψ induce una proiettività di un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbf{V}$ (cioè $\psi(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$), l'immagine tramite $\psi^\vee$ di ogni iperpiano della stella $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ di centro $\mathbf{H}$ appartiene ancora alla stessa stella:

$$\psi(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \qquad \Rightarrow \qquad \psi^\vee(\alpha) \in \mathcal{H}(\mathbf{H}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{H}(\mathbf{H}). \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Sia $\psi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ l'applicazione lineare associata a ψ. Allora $\psi^\vee$ è la proiettività associata all'applicazione trasposta:

$$\begin{aligned} \psi_l^\star : \mathbf{W}^\star &\to \mathbf{V}^\star \\ f &\mapsto f \circ \psi_l. \end{aligned}$$

Identificando i punti dei duali con gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ rispettivamente, si ha che $[f] = \mathbb{P}(\mathrm{Ker} f)$ e $\psi^\vee([f]) = \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f \circ \psi_l))$: si ottiene la tesi osservando che $\mathrm{Ker}(f \circ \psi_l) = \psi_l^{-1}(\mathrm{Ker} f)$.

□

Nelle notazioni della Proposizione precedente, la scelta di un riferimento R di $\mathbf{V}$ ed un riferimento S di $\mathbf{W}$ permette di descrivere ψ_l tramite la matrice associata $\mathbf{A}$. Nei riferimenti duali, la matrice di $\psi_l^\star$ è la matrice trasposta $\mathbf{A}^t$.

Esempio 6.1.18. Fissati $a_0 \neq 1$ e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, sia $\psi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ la proiettività indotta dall'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} \psi_l : \quad & \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1} \\ & \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_0 X_0 \\ a_1 X_0 + X_1 \\ a_2 X_0 + X_2 \\ \vdots \\ a_n X_0 + X_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si indichi con $\mathbf{A}$ la matrice di ψ_l rispetto alle basi canoniche. Si vede facilmente che, per ogni $P \in \alpha = \{X_0 = 0\}$, si ha $\psi(P) = P$. In particolare, $\psi(\alpha) = \alpha$ come iperpiano e α corrisponde ad un punto fisso per $\psi^\vee$: si osservi che, infatti, il vettore $(1, 0, \dots, 0)$ delle coordinate di α nel riferimento duale è un autovettore per $\psi_l^\star$.

Anche il punto Q di coordinate omogenee $[a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n]$, che non appartiene a α per le ipotesi assunte, è fisso per ψ, essendo:

$$\mathbf{A} \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n)^t = a_0 (a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n)^t.$$

Un iperpiano β di coordinate duali $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ contiene Q se e solo se

$$(b_0, b_1, \dots, b_n) \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n)^t = 0;$$

in tal caso, in accordo con la proposizione 6.1.16 anche $\psi_l^\star(\beta)$, che ha coordinate $\mathbf{A}^t \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n)^t$, contiene Q: infatti,

$$\begin{aligned} & (b_0, b_1, \dots, b_n) \cdot \mathbf{A} \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n)^t = \\ & = a_0 (b_0, b_1, \dots, b_n) \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_n)^t = 0. \end{aligned}$$

La stella di iperpiani per Q e l'iperpiano α corrispondono quindi ad un iperpiano e ad un punto tra loro disgiunti che vengono mutati in sè stessi nell'applicazione $\psi^\vee$. L'ipotesi che ogni punto di α sia fisso per ψ, comporta anche che ogni iperpiano β per Q sia fisso per $\psi^\vee$: infatti, $\beta \cap \alpha = \mathbf{H}$ è un sottospazio fisso per ψ e $\psi^\vee(\beta)$ deve contenere sia Q che $\mathbf{H}$. □

Esercizi svolti

Problema 6.1. Teorema di Pappo *Nel piano proiettivo complesso, siano Q_1, Q_2, Q_3 tre punti distinti allineati sulla retta r e Q'_1, Q'_2, Q'_3 tre punti distinti allineati sulla retta r' diversa da r. Si supponga inoltre che ciascuno dei punti Q_1, Q_2, Q_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3 siano distinti dal punto $P = r \cap r'$. Si indichino $S_1 =< Q_2, Q'_3 > \cap < Q_3, Q'_2 >$, $S_2 =< Q_1, Q'_3 > \cap < Q_3, Q'_1 >$, $S_3 =< Q_1, Q'_2 > \cap < Q_2, Q'_1 >$. Verifica che i punti S_1, S_2, S_3 sono allineati.*

Soluzione. Suggerimento: usa un riferimento proiettivo avente come punto unità S_3 e come punti fondamentali $P_1 = P = r \cap r'$, $P_2 = Q_1$, $P_3 = Q'_1$. In tale riferimento, r ha equazione $X_2 = 0$ mentre r' ha equazione $X_1 = 0$. Il punto Q_1 ha coordinate $[0, 1, 0]$ essendo l'intersezione di r con la retta $< Q'_1, Q_2 >=< Q'_1, S_3 >$; analogamente, si ricavano le coordinate del punto Q'_2. Dopo aver osservato che $Q_3 = [1, h, 0]$ con $h \neq 0, 1$ e $Q'_3 = [1, 0, k]$ con $k \neq 0, 1$, si determinano le coordinate di S_1 ed S_2 in funzione di h e k e si verifica che S_1 ed S_2 sono allineati con S_3.

Problema 6.2. Proiettività tra rette nel piano

a) Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tra due rette distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. E' possibile scegliere tre punti distinti Q_1, Q_2, Q_3 di r, in modo che essi e i loro trasformati $Q'_1 = \varphi(Q_1), Q'_2 = \varphi(Q_2), Q'_3 = \varphi(Q_3)$ siano distinti da $r \cap r'$. Per il teorema di Pappo (vedi Problema 6.1), i punti $S_1 =< Q_2, Q'_3 > \cap < Q_3, Q'_2 >$, $S_2 =< Q_1, Q'_3 > \cap < Q_3, Q'_1 >$, $S_3 =< Q_1, Q'_2 > \cap < Q_2, Q'_1 >$ sono allineati lungo una retta s. Mostra che $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$ ove con $\psi_1 : r \to s$ si denoti la proiezione da r su s di centro Q'_1, mentre con $\psi_2 : s \to r'$ si denoti la proiezione da s su r' di centro Q_1.
b) Mostra che ogni proiettività tra rette di $\mathbb{P}^2$ si scrive come composizione di al più tre proiezioni.
c) Sia $\varphi : r \to r'$ una proiettività tra due rette distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che, detto $P = r \cap r'$, si abbia $\varphi(P) = P$. Mostra che φ è la proiezione di r su r' rispetto ad un punto.

Soluzione.

Esercizi

SPAZIO PROIETTIVO DUALE

6.1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, siano assegnati i punti $P[2, 1, 2]$ e $Q[1, 0, 7]$. Determina, nel piano proiettivo duale $(\mathbb{P}^2)^\vee$ con riferimento duale, le coordinate proiettive del punto corrispondente alla retta r per P e Q. Determina inoltre equazioni parametriche e cartesiane della retta di $(\mathbb{P}^2)^\vee$ corrispondente al punto P.

6.2. Si considerino i punti come nell'esercizio 5.19.
i) Determina la stella di iperpiani di centro il punto P_0 come in a). Descrivi inoltre le coordinate (nel riferimento duale del riferimento standard) interpretando la stella come sottospazio di $(\mathbb{P}^3)^\vee$.

ii) Determina la stella di iperpiani avente come centro il sottospazio di cui al punto a) e le sue equazioni come sottospazio del duale.
iii) Nel punto e) un piano per P_0, P_1, P_2, può contenere la retta generata da P_3 e P_4?

6.3. Si consideri $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ con il riferimento standard. Determinare equazioni cartesiane e parametriche in $(\mathbb{P}^3)^\vee$ (rispetto al riferimento duale) del fascio di iperpiani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ di centro la retta generata da $[1, 1, 5, 0]$, $[1, 0, -2, 1]$. Esiste un iperpiano di tale fascio che passi per $[0, 1, 1, 0, 0]$?

6.4. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$. Sia $Z =< Q_1, Q_2 >$ il sottospazio generato dai seguenti punti di $\mathbb{P}^3$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= [1, 0, 3, 0, -2] \\ Q_2 &= [0, 2, 0, 1, -1] \end{aligned}$$

a) Determinare un sistema normale di equazioni per il sottospazio Z.
b) Determinare una rappresentazione parametrica della stella di iperpiani $\mathcal{H}(Z)$ di centro H.
c) Determinare un sistema di equazioni normali in $(\mathbb{P}^3)^\vee$ per $\mathcal{H}(Z)$.