5

Spazi Proiettivi

In questo capitolo viene introdotta la nozione di spazio proiettivo. Per rendere l'esposizione più flessibile e adattabile agli interessi di chi legge, nei complementi sono stati raccolti gli esempi degli spazi proiettivi numerici 1,2,3, che possono essere letti in modo indipendente dal resto del testo (e dunque contengono parti ripetitive per chi ha letto la descrizione generale).

5.1 Considerazioni preliminari

Raccogliamo alcuni esempi che potremo più facilmente trattare introducendo la nozione di retta proiettiva.

Nel piano (euclideo o complessificato), fissiamo un riferimento $\mathcal{R}$. Fissato un punto $P(p_1, p_2)$, consideriamo il fascio di rette $\Sigma(P)$ per P, costituito da tutte le rette passanti per P: cerchiamo di assegnare una struttura sull'insieme delle rette del fascio.

Primo modo Le rette del fascio per P sono in corrispondenza biunivoca con le giaciture delle rette, cioè con *i sottospazi di dimensione 1 dello spazio* $\mathcal{V}^2$ *dei vettori del piano.*

Secondo modo Ogni retta del fascio per P ammette una equazione cartesiana della forma

$$r_{\lambda,\mu} : \lambda(x_1 - p_1) + \mu(x_2 - p_2) = 0$$

ove la coppia (λ, μ) è individuata solo a meno di un multiplo per una costante non nulla ed è diversa dalla coppia $(0, 0)$.

Terzo modo Le rette del fascio per P sono in corrispondenza con i punti di una retta "estesa" aggiungendo un nuovo punto, come nell'esempio seguente.

Esempio 5.1.1. **Completamento proiettivo di una retta** Consideriamo una retta r non contenente il punto P. Consideriamo il fascio $\Sigma(P)$ costituito da tutte le rette passanti per P. Per ogni punto $X \in r$ noi possiamo considerare la retta r_X generata da P e da X. Possiamo allora considerare l'applicazione:

$$\begin{aligned} \iota_r : \; r &\to \Sigma(P) \\ X &\mapsto r_X . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Questa applicazione è iniettiva e permette quindi di identificare r con un sottoinsieme proprio di $\Sigma(P)$: l'immagine di ι_r contiene tutte le rette del fascio $\Sigma(P)$, tranne la retta r' passante per P e parallela ad r (che ha la stessa direzione di r). Il fascio $\Sigma(P)$ viene identificato con un nuovo oggetto (detto *retta proiettiva*), ottenuto dalla retta r aggiungendo un punto, che viene detto *punto improprio* o *punto all'infinito* e corrisponde alla direzione di r. Per distinguerli, i punti di r sono detti *punti propri*, mentre il punto improprio viene indicato con i simboli

$$r_\infty \text{ oppure } \infty.$$

Poniamo

$$r^- = r \cup \{r_\infty\};$$

altri simboli correntemente utilizzati sono $\overline{r}$ (da non confondersi con il coniugato della retta r) e $\mathbb{P}(r)$; diciamo che r^- è il *completamento proiettivo* (o, più semplicemente, *completamento*) della retta r. Diremo anche che r^- è una *retta proiettiva* e, per distinguerle, chiameremo *rette affini* le rette dello spazio euclideo e dello spazio complesso.

La nozione di *retta proiettiva* (e *piano o spazio proiettivo*) può essere definita in modo più astratto, fornendo un'unica chiave di lettura per trattare i tre punti di vista considerati.

5.2 Spazi proiettivi

Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}-$spazio vettoriale non nullo. In $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiamo la *relazione di proporzionalità* $\mathcal{P}$:

$$\mathbf{v}\mathcal{P}\mathbf{w} \Leftrightarrow \text{ esiste } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ tale che } \mathbf{v} = \lambda\mathbf{w} \tag{5.2}$$

che è una relazione di equivalenza. L'insieme quoziente $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}/\mathcal{P}$ prende il nome di *spazio proiettivo associato allo spazio vettoriale* $\mathbf{V}$ e si denota con il simbolo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Indicheremo con

$$\pi : \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}) \tag{5.3}$$

l'applicazione quoziente. Per ogni elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, scriveremo $[\mathbf{v}]$ per denotare l'elemento $\pi(\mathbf{v})$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, cioè la classe di proporzionalità di $\mathbf{v}$. Gli elementi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, cioè le classi di proporzionalità dei vettori non nulli di V, sono i sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbf{V}$ privati del vettore nullo: essi si dicono *punti* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. In sostanza $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ può essere identificato con la stella $\Sigma(\mathbf{0})$ di rette dello spazio affine associato a $\mathbf{V}$, di centro il vettore $\mathbf{0}$.

Anche l'insieme vuoto viene considerato come spazio proiettivo, il cui spazio vettoriale associato è lo spazio nullo. Se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, per *dimensione* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende la dimensione di $\mathbf{V}$ diminuita di 1, cioè si pone per definizione

$$\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbf{V} - 1. \tag{5.4}$$

In accordo con questa definizione, lo spazio proiettivo vuoto ha dimensione -1. Si osservi che $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione 0, se e solo se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ consiste di un solo punto. Infatti se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 0$ allora $\dim \mathbf{V} = 1$. In tal caso $\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ha una sola classe di proporzionalità e quindi $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si riduce ad un solo punto. Viceversa se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è ridotto ad un solo punto allora tutti i vettori di $\mathbf{V}$ sono proporzionali, ossia $\dim \mathbf{V} = 1$ e quindi $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 0$.
Gli spazi proiettivi di dimensione 1 si dicono *rette proiettive*, quelli di dimensione 2 *piani proiettivi*.

Studiamo in dettaglio un esempio particolare, che servirà da modello:

Definizione 5.2.1. Lo spazio proiettivo numerico di dimensione n. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Per ogni $n \geq 0$ lo *spazio proiettivo numerico di dimensione* $n \geq 0$ *sul campo* $\mathbb{K}$ è il quoziente di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ rispetto alla relazione di equivalenza data dalla proporzionalità $\mathcal{P}$:

$$(X_0, \dots, X_n)\mathcal{P}(Y_0, \dots, Y_n) \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ con } X_i = \rho Y_i, i = 0, \dots, n.$$

Lo spazio proiettivo numerico di dimensione n si denota col simbolo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, o più semplicemente col simbolo $\mathbb{P}^n$. Un suo punto P è una classe di proporzionalità di vettori numerici non nulli d'ordine $n+1$ su $\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)$ è un vettore della classe P, allora

$$P = [\mathbf{X}] = \{k\mathbf{X} = (kX_0, \dots, kX_n), \text{ al variare di } k \text{ in } \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \tag{5.5}$$

Noi scriveremo anche $[X_0, \dots, X_n]$ per denotare la classe $[\mathbf{X}]$ e diremo che esso è un *punto dello spazio proiettivo*. Il vettore non nullo $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)$ si dice un *vettore di coordinate omogenee* di P. Si osservi che le coordinate omogenee di un punto P di $\mathbb{P}^n$ sono una $(n+1)-$pla di elementi di $\mathbb{K}$, non tutti nulli, e determinati solo a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Sovente, *penseremo alle coordinate omogenee dei punti di* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ *come vettori colonne* invece che come vettori righe.

Lo spazio proiettivo numerico di dimensione $n = 1$ è detto *retta proiettiva numerica*, mentre lo spazio proiettivo numerico di dimensione 2, è detto *piano proiettivo numerico*.

Osservazione 5.2.2. Due vettori numerici $(X_0, \dots, X_n)$ e $(Y_0, \dots, Y_n)$ definiscono lo stesso punto nello spazio proiettivo se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \\ Y_0 & \dots & Y_n \end{pmatrix} = 1 \tag{5.6}$$

Si osservi che $\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}}$ consiste di un solo punto.

5.3 Sottospazi di uno spazio proiettivo.

Per *sottospazio* (proiettivo) di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende ogni suo sottoinsieme del tipo $\mathbf{H} = \pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{W}$ è nullo, $\mathbf{H}$ è il sottoinsieme vuoto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Se invece $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbf{V}$, H coincide con $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Quindi, riassumendo, i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono il sottoinsieme vuoto (detto *sottospazio vuoto*), ovvero i sottoinsiemi del tipo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale non nullo di $\mathbf{V}$.

Se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, ogni sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ non vuoto è uno spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale di dimensione finita, e risulta così definita la sua dimensione. Per *codimensione* di un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si intende l'intero

$$\text{codimensione di } \mathbf{H} = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathbf{H}. \tag{5.7}$$

I sottospazi di codimensione 1 si dicono *iperpiani* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Esempio 5.3.1. **Sottospazi dello spazio proiettivo numerico** Esaminiamo i sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Sia $\mathbf{W}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$ di dimensione $p+1$, con $p \geq 0$. Sappiamo che esiste una matrice $\mathbf{U}$ di tipo $(n-p, n+1)$ e rango $n-p$, tale che $\mathbf{W}$ abbia il *sistema normale di equazioni* $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{K}^{n+1}$. Di conseguenza $H = \pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ non è altro che l'insieme dei punti di $\mathbb{P}^n$ aventi coordinate omogenee $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)^{\mathrm{t}}$ (considerati qui come vettori colonna) soluzioni del sistema $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Viceversa, sia dato un sistema omogeneo $\mathcal{A}$ di equazioni lineari in $n+1$ incognite $X_0, \ldots, X_n$. Osserviamo che un vettore numerico $\mathbf{Y}$ soddisfa un sistema lineare omogeneo se e solo se $\rho\mathbf{Y}$ soddisfa il sistema per ogni $\rho \in \mathbb{K}$ non nullo: ha senso perciò parlare dei punti di $\mathbb{P}^n$ *aventi coordinate omogenee soluzioni del sistema*. Sia $\mathbf{W}$ il sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$ delle soluzioni del sistema $\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$. L'insieme $\mathbf{H}$ dei punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni del sistema coincide con $\pi(\mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\})$ e dunque è un sottospazio di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; possiamo dunque riformulare la definizione di sottospazio proiettivo in questo caso:

Definizione 5.3.2. Un *sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ le cui coordinate omogenee soddisfano un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + \ldots u_{1,n}X_n = 0 \\ u_{20}X_0 + u_{21}X_1 + u_{22}X_2 + \ldots + u_{2,n}X_n = 0 \\ \cdots \\ u_{n0}X_0 + u_{p1}X_1 + u_{p2}X_2 + \ldots + u_{p,n}X_n = 0 \end{cases}$$

Si dice che un *sistema di equazioni omogenee che rappresenta o definisce* $\mathbf{H}$ (o che il sistema è un *sistema di equazioni omogenee* di $\mathbf{H}$) se i punti di $\mathbf{H}$ hanno per coordinate omogenee tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema.

Ovviamente tutti e soli i sistemi che rappresentano uno stesso sottospazio $\mathbf{H}$ sono tra loro equivalenti. Tra questi si può sempre scegliere un *sistema normale* che rappresenta $\mathbf{H}$, cioè un sistema di equazioni composto dal numero minimo di equazioni; *il numero di equazioni di un sistema normale è uguale alla codimensione di* $\mathbf{H}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Esempio 5.3.3. **Iperpiani dello spazio proiettivi numerico** Un iperpiano è un sottospazio che può essere rappresentato con una singola equazione omogenea non nulla del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n = 0$ con $(u_o, \ldots, u_n) \neq \mathbf{0}$, determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Un iperpiano ha quindi codimensione 1.

Ad esempio in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono i punti: infatti, il punto $[a, b]$ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si rappresenta con la singola equazione $bX_0 - aX_1 = 0$ che ha per soluzioni tutti e soli i vettori numerici proporzionali ad (a, b). Si osservi che gli unici sottospazi propri di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ sono i punti.

Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono rette e sono rappresentate da equazioni del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$. Nello spazio $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ gli iperpiani sono piani e sono rappresentati da equazioni del tipo $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0$.

Tra gli iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ segnaliamo gli $n + 1$ iperpiani aventi equazioni $X_0 = 0$, $X_1 = 0, \ldots,$ $X_n = 0$, denotati con i simboli $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ e detti *iperpiani fondamentali* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 5.3.4. Diciamo che i punti $P_0[\mathbf{v}_0]$, …, $P_m[\mathbf{v}_m] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono *indipendenti* se i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ sono linearmente indipendenti. Altrimenti, diciamo che i punti sono *dipendenti.*

In particolare punti $P_0[\mathbf{p}_0]$, …, $P_m[\mathbf{p}_m]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, sono *indipendenti* se i vettori coordinati $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$ generano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$ di dimensione $m + 1$.

Definizione 5.3.5. Sia $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Diciamo che i punti $P_0[\mathbf{v}_0]$, …, $P_m[\mathbf{v}_m] \in \mathbb{P}(\mathbf{W})$ *generano* $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ se i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m \in W$ sono un sistema di generatori per $\mathbf{W}$.

Facciamo alcune osservazioni (prova a dimostrarle):

a) se $\mathbf{V}$ ha dimensione finita, allora il massimo numero di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è pari a dim $\mathbf{V}$= dim $\mathbb{P}(\mathbf{V}) + 1$ e ogni sistema di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ può essere completato ad un sistema di punti indipendenti d'ordine pari a dim $\mathbf{V}$= dim $\mathbb{P}(\mathbf{V}) + 1$;
b) *ogni sottospazio* $\mathbf{H}$ *di dimensione* $m > 0$ *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *contiene (almeno) un sistema di* $m + 1$ *punti indipendenti e ogni tale sistema genera* $\mathbf{H}$;
c) $(P_0, \ldots, P_m)$ è un sistema di punti indipendenti se e solo se ogni suo sottosistema è costituito da punti indipendenti.

Sia ora $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ un sottospazio di dimensione m dello spazio $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e sia $(P_0, \ldots, P_m)$ un sistema di punti indipendenti di $\mathbf{H}$ (nota che i punti sono esattamente $m + 1$ e che quindi formano un sistema massimale di punti indipendenti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e generano $\mathbb{P}(\mathbf{V})$). Allora se $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $i = 0, \ldots, m$, si ha che il punto

$$P = [\lambda_0\mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m]$$

descrive, al variare di $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tutti i punti di $\mathbf{H}$. Anzi l'applicazione

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} & \to \mathbf{H} \\ [\lambda_0, \ldots, \lambda_m] & \mapsto [\lambda_0\mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m] \end{array} \tag{5.8}$$

è una biezione. Infatti φ è ben definita ed è suriettiva perché $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è generato da $\{P_0, \ldots, P_m\}$, il che equivale a dire che $\mathbf{W}$ è generato da $\{\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. Inoltre, φ è iniettiva perchè i punti $P_0, \ldots, P_m$ sono indipendenti, il che equivale a dire che i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti; infatti:

$$[\lambda_0\mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m] = [\lambda'_0\mathbf{v}_0 + \ldots + \lambda'_m\mathbf{v}_m]$$
$$\Leftrightarrow \text{ esiste un } \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che } (\lambda_0 - \rho\lambda'_0)\mathbf{v}_0 + \ldots + (\lambda_m - \rho\lambda'_m)\mathbf{v}_m = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) = \rho(\lambda'_0, \ldots, \lambda'_m).$$

L'applicazione φ definita in (5.8) è detta *rappresentazione parametrica* del sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. L'espressione

$$[\mathbf{X}] = [\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)] \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$$

viene detta *equazione parametrica del sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$. Si noti che *la rappresentazione parametrica* non è unica, bensì non solo dipende dalla scelta del sistema $(P_0, \ldots, P_m)$ di punti indipendenti in $\mathbf{H}$ ma *dipende anche dalla scelta dei rappresentanti* $(\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_m)$. Nel paragrafo 5.5 troveremo un modo per esprimere le scelte fatte utilizzando esclusivamente punti dello spazio proiettivo e senza far comparire esplicitamente lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$.

Esempio 5.3.6. **Equazioni parametriche e omogenee per sottospazi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$**
I punti $P_0 = [p_{00}, \ldots, p_{0n}]$, ..., $P_m = [p_{m0}, \ldots, p_{mn}]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i vettori numerici $(p_{00}, \ldots, p_{0n})$, ..., $(p_{m0}, \ldots, p_{mn})$, ossia se e solo se:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = m + 1 \tag{5.9}$$

Si noti che sostituendo i vettori $(p_{00}, \ldots, p_{0n}), \ldots, (p_{m0}, \ldots, p_{mn})$ con vettori ad essi proporzionali e non nulli, che individuano gli stessi punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, la matrice che appare in (5.9) cambia, ma la condizione espressa dalla (5.9) rimane invariata.

Se la (5.9) è verificata, le equazioni parametriche del sottospazio proiettivo $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ (ove $\mathbf{W} =< (p_{00}, \ldots, p_{0n}), \ldots, (p_{m0}, \ldots, p_{mn}) >$) possono essere scritte così:

$$\begin{cases} X_0 = \lambda_0 p_{00} + \ldots + \lambda_m p_{m0} \\ \ldots \\ X_n = \lambda_0 p_{0n} + \ldots + \lambda_m p_{m0} \end{cases} \tag{5.10}$$

che al variare di $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ danno tutti e soli i vettori di coordinate omogenee $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ dei punti di $\mathbf{H}$. Il sistema (5.10) prende il nome di sistema di *equazioni parametriche del sottospazio proiettivo* $\mathbf{H}$.

D'altra parte un punto $P = [X_0, \ldots, X_n]$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se il vettore $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ dipende linearmente dalle righe della matrice che appare in (5.9) ossia se e solo se:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} X_0 & \cdots & X_n \\ p_{00} & \cdots & p_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = m + 1 \tag{5.11}$$

Questa si dice una *equazione matriciale del sottospazio proiettivo* **H**. Per ottenere da essa un sistema di equazioni omogenee di **H** basta annullare tutti i minori di ordine massimo della matrice che appare in (5.11). Per il Teorema di Kronecker, è sufficiente annullare i minori degli orlati di una sottomatrice non singolare di ordine $m+1$; sappiamo di poter trovare un sistema con $n-m$ equazioni.

Se $m = n-1$, ossia se **H** è un iperpiano, la matrice che appare in (5.11) è quadrata d'ordine $n+1$, e quindi l'equazione di H si ottiene annullando il determinante di tale matrice, ossia scrivendo

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & \dots & X_n \\ p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1,0} & \dots & p_{n-1,n} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.12}$$

Sviluppando il determinante con la regola di Laplace applicata alla prima riga, questa equazione si scrive come

$$u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0$$

dove $u_0, \ldots, u_n$ sono i minori d'ordine massimo della matrice $\begin{pmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$ presi con segni alterni, e questi sono non tutti nulli perché la matrice in questione ha rango massimo, per l'ipotesi che i punti $P_0, \ldots, P_{n-1}$ siano indipendenti.

Facciamo alcuni esempi:

a) Se $P = [a, b, c]$ e $Q = [a', b', c']$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^2$ l'unica retta che li contiene entrambi ha equazione: $\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0.$

b) **Punti** Il fatto che ogni sottospazio possa essere rappresentato con un sistema lineare omogeneo normale di equazioni, si può tradurre dicendo che *ogni sottospazio è intersezione di iperpiani, e che il numero minimo di iperpiani di cui il sottospazio è intersezione è pari alla codimensione del sottospazio.*
Ad esempio un punto P di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ può essere rappresentato con un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite del tipo

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + \ldots + u_{1,n}\, X_n = 0 \\ \dots \\ u_{n0}X_0 + \ldots + u_{n,n}\, X_n = 0 \end{cases} \tag{5.13}$$

che sia normale, ossia tale che la matrice

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{10} & \dots & u_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n0} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

abbia rango n. Allora le soluzioni del sistema (5.13) sono proporzionali ai minori di ordine n di **U** presi con segni alterni, e queste sono le coordinate omogenee del punto P di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ rappresentato da (5.13). Il punto P risulta intersezione degli n iperpiani rappresentati dalle singole equazioni del sistema (5.13). Ad esempio il sistema:

$$\begin{cases} 2X_0 + X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

rappresenta in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il punto $[0, 1, 1]$.
c) **Rette** Una retta $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ammette sempre una equazione parametrica della forma

$$[\mathbf{X}] = [\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2]$$

ove $A[\mathbf{v}_1]$ e $B[\mathbf{v}_2]$ sono due punti distinti della retta. La rappresentazione parametrica corrispondente è una applicazione biettiva: (che impareremo a chiamare *sistema di coordinate omogenee sulla retta* H nel paragrafo 5.5):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} &\to \mathbf{H} \\ [\lambda, \mu] &\mapsto [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}] \end{aligned} \tag{5.14}$$

In particolare, ogni retta di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è parametrizzata dalla retta proiettiva numerica. É dunque possibile parlare, in generale, di "rette proiettive".
Ogni retta di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si può rappresentare con un sistema normale di $n-1$ equazioni (indipendenti tra loro). Ad esempio una retta di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ si rappresenta con un sistema del tipo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + u_{11}X_1 + u_{12}X_2 + u_{13}X_3 = 0 \\ u_{20}X_0 + u_{21}X_1 + u_{22}X_2 + u_{23}X_3 = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

con la condizione che:

$$rg \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} = 2. \tag{5.16}$$

Esempio 5.3.7. **Intersezione e spazio congiungente** Dati due sottospazi di $\mathbb{P}^n$, è chiaro che la loro *intersezione* è ancora un sottospazio di $\mathbb{P}^n$: dati due sottospazi di $\mathbb{P}^n$ rappresentati dai sistemi omogenei $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, il sottospazio intersezione dei due si rappresenta con il sistema $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Più in generale, l'*intersezione* di due sottospazi $\mathbf{H}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$ e $\mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è il sottospazio

$$\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2).$$

Due sottospazi $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si dicono *incidenti* se la loro intersezione è non vuota. Consideriamo ora il sottospazio

$$\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)$$

Il sottospazio proiettivo $\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2$ si dice *spazio congiungente* i due sottospazi $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$. Esso è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}^n$ contenente $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$; in particolare, per ogni $p \in \mathbf{H}_1$ ed ogni $Q \in \mathbf{H}_2$ con $P \neq Q$, lo spazio $\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2$ contiene la retta congiungente P e Q.

Più in generale, possiamo considerare lo spazio congiungente e lo spazio intrsezione di vari sottospazi; lo spazio congiungente punti $P_0, \ldots, P_m$ coincide con il sottospazio generato da $P_0, \ldots, P_m$.

Se $P = [a, b, c, d]$, $Q = [a', b', c', d']$ ed $R = [a'', b'', c'', d'']$ sono punti non complanari di $\mathbb{P}^3$, l'unico piano che li contiene ha equazione $\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 0.$

Se $P = [a, b, c, d]$, $Q = [a', b', c', d']$ sono punti distinti di $\mathbb{P}^3$, l'unica retta che li contiene ha equazione matriciale

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2. \tag{5.17}$$

Se, ad esempio, si ha

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.18}$$

un sistema di due equazioni per la retta in questione è dato annullando gli orlati, nella matrice che compare in (5.17), del minore che compare in (5.18), ossia

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_3 \\ a & b & d \\ a' & b' & d' \end{pmatrix} = 0,$$

che formano un sistema normale di equazioni per la retta.

Tenendo presente la formula di Grassmann per spazi vettoriali (Teorema (9.14) di [1]), si dimostra facilmente il seguente:

Teorema 5.3.8. (Formula di Grassmann in $\mathbb{P}^n$) *Sia $n \geq 1$. Se $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono sottospazi di $\mathbb{P}^n$ si ha*

$$\dim \mathbf{H}_1 + \dim \mathbf{H}_2 = \dim (\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2) + \dim (\mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2).$$

Nell'applicare la formula, è essenziale ricordarsi che la dimensione dello spazio vuoto è -1. In particolre, se $\mathbf{H}$ è un sottospazio di $\mathbb{P}^n$ e P è un punto, allora:
(a) o $P \in \mathbf{H}$, e in tal caso $P \vee \mathbf{H} = \mathbf{H}$;
(b) oppure $P \notin \mathbf{H}$, nel qual caso $P \vee \mathbf{H}$ è un sottospazio di dimensione di 1 superiore a quella di $\mathbf{H}$.

Similmente, se $\mathbf{H}'$ è un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ allora:
($a^\star$) o $\mathbf{H}'$ contiene $\mathbf{H}$, nel qual caso $\mathbf{H}' \cap \mathbf{H} = \mathbf{H}$;
($b^\star$) oppure $\mathbf{H}'$ non contiene $\mathbf{H}$, e allora $\mathbf{H}' \vee \mathbf{H} = \mathbb{P}^n$ e $\mathbf{H}' \cap \mathbf{H}$ è un sottospazio di dimensione di uno inferiore a quella di $\mathbf{H}$.

Inoltre, comunque assegnate due rette, il loro sottospazio congiungente ha dimensione ≤ 3; due rette in un piano proiettivo, o coincidono oppure si intersecano in un punto (non vale quindi l'assioma euclideo che assicura che, dati una retta ed un punto esterno ad essa, . Più generalmente due iperpiani in uno spazio proiettivo, o coincidono oppure si intersecano in un sottospazio di codimensione 2.

In uno spazio di dimensione 3 una retta e un piano che non la contenga si intersecano in un punto. Più in generale la stessa cosa accade per una retta e un iperpiano che non la contenga.

Dalla regola di Grassmann segue in particolare che:

$$\dim \mathbf{H}_1 \vee \mathbf{H}_2 \leq \dim \mathbf{H}_1 + \dim \mathbf{H}_2 + 1$$

e l'uguaglianza viene raggiunta se e solo se $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \emptyset$, caso in cui $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ si dicono *sghembi*. Ciò equivale a dire che i sottospazi $\mathbf{W}_1$ e $\mathbf{W}_2$, associati ad $\mathbf{H}_1$ ed $\mathbf{H}_2$ rispettivamente, sono in somma diretta, cioè $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

5.4 Proiettività

Definizione 5.4.1. Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ spazi vettoriali non nulli. Una applicazione $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ si dice una *proiettività* (o *omografia* o *trasformazione proiettiva*) se esiste una applicazione lineare iniettiva $\varphi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ (che si dice l'*applicazione lineare associata a* φ) tale che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si abbia

$$\varphi([\mathbf{v}]) = [\varphi_l(\mathbf{v})]$$

Si richiede che l'applicazione φ_l sia iniettiva, altrimenti esisterebbe un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con $\varphi_l(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e il corrispondente punto $P = [\mathbf{v}]$ non avrebbe una immagine. Si noti che una proiettività è necessariamente iniettiva: infatti, se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi([\mathbf{v}]) = \varphi([\mathbf{w}]) \Leftrightarrow [\varphi_l(\mathbf{v})] = [\varphi_l(\mathbf{w})] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{ esiste un } k \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che } \varphi_l(\mathbf{v}) = k\varphi_l(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varphi_l(\mathbf{v} - k\mathbf{w}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = k\mathbf{w} \Leftrightarrow [\mathbf{v}] = [\mathbf{w}]. \end{aligned}$$

Una proiettività biettiva prende anche il nome di *isomorfismo* e l'applicazione lineare ad esso associata è un isomorfismo. Spazi proiettivi legati da un isomorfismo si dicono *isomorfi*. Inoltre, diciamo che due sottoinsiemi $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$ di uno spazio proiettivo sono *proiettivi* o *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività φ tale che $\varphi(\mathbf{S}) = \mathbf{S}'$. La composizione di due proiettività è ancora una proiettività e l'applicazione inversa di una proiettività biettiva è una proiettività. Pertanto le proiettività biettive di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè con l'operazione di prodotto di composizione costituiscono un gruppo, detto *gruppo proiettivo* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, che si denota con $\mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$.

Osservazione 5.4.2. Se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione finita ogni proiettività di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè è necessariamente biettiva; pertanto, in questo caso, $\mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$ è costituito da tutte le proiettività di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè. Inoltre, sempre se $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ha dimensione finita, per definizione di proiettività, esiste una applicazione naturale suriettiva

$$p : \mathrm{Gl}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Pgl}(\mathbf{V})$$

che ad ogni $\psi \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V}) = \{\text{automorfismi lineari di } \mathbf{V}\}$ associa l'unica proiettività φ tale che $\varphi_l = \psi$, ossia tale che $\varphi([\mathbf{v}]) = [\psi(\mathbf{v})]$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$. La p non è un'applicazione iniettiva, in quanto se $\varphi \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V})$ e se k è uno scalare non nullo, si ha $p(k\psi) = p(\psi)$. Infatti per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ si ha

$$p(k\psi)([\mathbf{v}]) = [k\psi(\mathbf{v})] = [\psi(\mathbf{v})] = p(\psi)([\mathbf{v}])$$

Più precisamente abbiamo la:

Proposizione 5.4.3. *Date ψ e $\psi' \in \mathrm{Gl}(\mathbf{V})$, si ha $p(\psi) = p(\psi')$ se e solo se esiste un $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\psi' = k\psi$.*

Dimostrazione. Se $p(\psi) = p(\psi')$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ esiste uno scalare non nullo $k_{\mathbf{v}}$ tale che $\psi'(\mathbf{v}) = k_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{v})$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vettori non nulli di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti, è chiaro che $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{w}}$. Se invece $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, allora

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\psi(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\psi(\mathbf{v}) + \psi(\mathbf{w}) \\ &= \psi'(\mathbf{v}) + \psi'(\mathbf{w}) = k_{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{v}) + k_{\mathbf{w}}\psi(\mathbf{w})\end{aligned}$$

e, poiché $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, si deve avere che $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = k_{\mathbf{w}}$. Ma allora $k_{\mathbf{v}} = k_{\mathbf{w}}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, e dunque $\psi' = k\,\psi$ con $k = k_{\mathbf{v}}$.

□

Come visto anche in [1], capitolo 13, n. 10, si verifica facilmente che p è un omomorfismo di gruppi (cfr. [1], proposizione (13.13)). Inoltre come immediato corollario della Proposizione 5.4.3 si ha che:

Corollario 5.4.4. *Il nucleo di p è il sottogruppo di $\mathrm{Gl}(\mathbf{V})$, isomorfo al gruppo moltiplicativo di $\mathbb{K}$, costituito dalle omotetie invertibili di $\mathbf{V}$.*

Esempio 5.4.5. **Proiettività tra spazi proiettivi numerici** Si consideri una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ e l'applicazione lineare ad essa associata $\varphi_l : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$. Poiché φ_l è iniettiva, si ha necessariamente $n \le m$.

Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j} \in M(m+1, n+1; \mathbb{K})$ la matrice associata a φ_l. Per ogni vettore $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_n)^t, \mathbf{Y} = (Y_0, \dots, Y_m)^t \in \mathbb{K}^{n+1}$, considerati come vettori colonna, si ha che $[\mathbf{Y}] = [\varphi_l(\mathbf{X})]$, se e solo se esiste $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$ con

$$\rho\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \tag{5.19}$$

ossia

$$\begin{cases} \rho Y_0 = a_{00}X_0 + \ldots + a_{0n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_m = a_{m0}X_0 + \ldots + a_{mn}X_n \end{cases} \quad \exists \rho \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{5.20}$$

La proiettività φ agisce sui punti di $\mathbb{P}^n$ nel seguente modo: per ogni punto $P = [\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^n$ si ha $\varphi(P) = [\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}] \in \mathbb{P}^m$. La (5.19) si dice *equazione matriciale* della proiettività e le (5.20) si dicono *equazioni esplicite* della proiettività. Notiamo che, in virtù dell'iniettività di φ_l, la matrice $\mathbf{A}$ ha rango $n + 1$.

In particolare una proiettività φ di $\mathbb{P}^n$ in sè è data assegnando una matrice $\mathbf{A}$ quadrata, non degenere, d'ordine $n + 1$ su $\mathbb{K}$, che determina l'applicazione lineare associata φ_l. Il gruppo proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si denota col simbolo $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$ e prende il nome di *gruppo proiettivo lineare generale*. Abbiamo un omomorfismo suriettivo

$$p : \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K}) \to \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{K})$$

La proposizione (5.4.3) si traduce nel seguente fatto: *due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ di $GL(n+1, \mathbb{K})$ determinano la stessa proiettività in $PGL(n+1, \mathbb{K})$ se e solo se sono proporzionali.* □

Riprendiamo la discussione generale. Vale la seguente:

Proposizione 5.4.6. *Sia* $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *una proiettività e sia* $\mathbf{H}$ *un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*. Allora* $\mathbf{H}' = \varphi(\mathbf{H})$ *è un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$*; inoltre la restrizione di* φ *ad* $\mathbf{H}$ *è un isomorfismo di* $\mathbf{H}$ *su* $\mathbf{H}'$*.*
In particolare, se $\mathbf{H}$ *ha dimensione finita, anche* $\mathbf{H}' = \varphi(\mathbf{H})$ *ha dimensione finita e i sottospazi* $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{H}'$ *hanno la stessa dimensione.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ allora posto $\mathbf{W}' = \varphi(\mathbf{W})$, si ha che $\mathbf{W}'$ è un sottospazio di $\mathbf{V}'$ e chiaramente $\mathbf{H}' = \mathbb{P}(\mathbf{W}')$. Di qui si deduce subito l'asserto. □

Come immediata conseguenza della proposizione 5.4.6 si ha che le proiettività conservano dipendenza e indipendenza di punti.

Esempio 5.4.7. **Equazioni dell'immagine di un sottospazio**
Sia $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ una proiettività avente equazioni (5.19) o (5.20). Consideriamo un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ avente un sistema normale di equazioni del tipo:

$$\begin{cases} u_{10}X_0 + \ldots + u_{1n}X_n = 0 \\ \ldots \\ u_{h0}X_0 + \ldots + u_{hn}X_n = 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

che scriviamo in forma matriciale come

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = 0 \tag{5.22}$$

Dunque $\mathbf{H}$ ha dimensione $n - h$. Per trovare le equazioni del sottospazio $\varphi(\mathbf{H})$ possiamo procedere nel modo seguente:

(a) determiniamo dapprime dapprima $n-h+1$ punti indipendenti $P_0, \ldots, P_{n-h}$ di $\mathbf{H}$: ciò si fa trovando $n-h+1$ soluzioni $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_{n-h}$ linearmente indipendenti del sistema (5.21);

(b) osserviamo che $\varphi(\mathbf{H})$ è il sottospazio generato dai punti $\varphi(P_0) = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_0]$, $\ldots, \varphi(P_{n-h}) = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{n-h}]$, che sono indipendenti perché φ_l è iniettiva; ora troviamo per $\varphi(\mathbf{H})$ equazioni parametriche o omogenee come indicato nell'Esempio 5.3.6.

In particolare se $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ è un isomorfismo, allora le equazioni di φ^{-1} si ottengono dalle (5.19) o (5.20) risolvendole, come sistema lineare di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite $X_0, \ldots, X_n$. Si ottiene così:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

e le equazioni di $\varphi(\mathbf{H})$ sono allora ovviamente date da $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, ossia da

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Ad esempio si consideri la proiettività φ di $\mathbb{P}^2$ in sè di equazioni

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 + X_1 \\ Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$$

e la retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione

$$3X_0 + 2X_1 + X_2 = 0$$

La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 - Y_1 + Y_2 \\ X_1 = Y_1 - Y_2 \\ X_2 = Y_2 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione

$$3(Y_0 - Y_1 + Y_2) + 2(Y_1 - Y_2) + Y_2 = 0 \Leftrightarrow 3Y_0 - Y_1 + 2Y_2 = 0. \quad \square$$

Osservazione 5.4.8. È possibile estendere la definizione di proiettività considerando anche trasformazioni indotte da applicazioni lineari non iniettive. Se $\varphi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ è un'applicazione lineare non nulla tra $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $\mathbf{W} = \ker \varphi_l$, si considera il sottospazio $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$; si chiama *proiettività degenere* indotta da φ_l l'applicazione $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash\mathbf{H} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ definita da $\varphi([\mathbf{v}]) = [\varphi_l(\mathbf{v})]$ per ogni $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})\backslash\mathbf{H}$. Se φ_l è iniettiva, il sottospazio proiettivo $\mathbf{V}$ è vuoto e φ è la trasformazione proiettiva indotta da φ_l come nella Definizione 5.4.1: in tal caso si specifica talvolta che φ è una *proiettività non degenere*. Come nel caso delle proiettività, l'applicazione φ permette di ricostruire l'applicazione lineare φ_l a meno di moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Se $\mathbf{S} \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$ è un sottospazio non contenuto in $\mathbf{H}$, la restrizione di φ al sottoinsieme $\mathbf{S} \setminus (\mathbf{S} \cap \mathbf{H})$ è una proiettività degenere a valori in $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$, e, se $\mathbf{S} \cap \mathbf{H} = \emptyset$, è una proiettività.

5.5 Riferimenti proiettivi

Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$. Poiché $\mathbf{V}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n+1$, esso è isomorfo a $\mathbb{K}^{n+1}$ e corrispondentemente $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ sono isomorfi. Ogni isomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ si dice un *sistema di coordinate omogenee* in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. In particolare l'identità di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è un sistema di coordinate di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ detto *sistema di coordinate naturale* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Con questa definizione, una descrizione parametrica di un sottospazio proiettivo $\mathbf{H}$, definita in (5.8), è un sistema di coordinate del sottospazio $\mathbf{H}$.

Dato un punto P di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, le coordinate omogenee di $\varphi^{-1}(P)$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dicono *coordinate omogenee* del punto P nel riferimento $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$. In particolare, si dicono *punti fondamentali del riferimento* gli $n+1$ punti aventi coordinate omogenee $[1, 0, \ldots, 0]$, $[0, 1, 0, \ldots, 0]$, $\ldots$,$[0, \ldots, 0, 1]$, mentre il punto di coordinate omogenee $[1, 1, \ldots, 1]$ si dice *punto unitario del riferimento.* L'insieme ordinato composto dai punti fondamentali e dal punto unità prende il nome di *riferimento proiettivo* associato al sistema di coordinate omogenee. Il Teorema fondamentale dei riferimenti (Corollario 5.5.5) mostrerà che φ è univocamente individuata dal riferimento ad essa associato e diremo talora che φ *"è" un riferimento.*

Dato un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, un sistema di equazioni omogenee di $\varphi^{-1}(\mathbf{H})$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si dice anche un *sistema di equazioni* di $\mathbf{H}$ in φ (o che *rappresenta* $\mathbf{H}$ *nel sistema di coordinate* φ). Se $\mathcal{A}$ è un tale sistema omogeneo, un punto P di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se le sue coordinate omogenee sono soluzione del sistema $\mathcal{A}$. Simili considerazioni valgono per sistemi di equazioni parametriche.

Dato poi un sistema di punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, essi sono *dipendenti o indipendenti* a seconda che lo siano i punti ad essi corrispondenti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Inoltre, sottospazi proiettivi sghembi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ corrispondono a sottospazi sghembi di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Definizione 5.5.1. Una $(m+1)$-pla $(P_0, \dots, P_m)$ di punti di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione n su $\mathbb{K}$ si dice *in posizione generale* se

$m \leq n$ e $P_0, \dots, P_m$ sono indipendenti, oppure
$m > n$ e ogni $n+1$-pla di punti estratta da $(P_0, \dots, P_m)$ è indipendente (e quindi genera $\mathbb{P}(\mathbf{V})$).

Esempio 5.5.2. In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tre punti sono in posizione generale se e solo se sono tra loro distinti a due a due. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ quattro punti sono in posizione generale se e solo se tre di loro non sono mai allineati. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ cinque punti sono in posizione generale se e solo se quattro di loro non sono mai complanari.

Esempio 5.5.3. Assegnato un sistema di coordinate omogenee $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$, la $n+2$-pla $(P_0, \dots, P_{n+1})$ formata dai punti fondamentali e dal punto unitario di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è in posizione generale. Infatti basta considerare la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

di tipo $(n+2, n+1)$ avente per righe le coordinate omogenee dei punti $P_0, \dots, P_{n+1}$ ordinatamente. Quanto affermato segue dal fatto che comunque si cancelli una riga da $\mathbf{A}$ si ottiene una matrice quadrata di rango massimo $n+1$, il cui determinante è uguale, come subito si verifica, a ± 1.

Il Teorema fondamentale dei riferimenti (Corollario 5.5.5) mostrerà che ogni $(n+2)$-pla di punti in posizione generale si ottiene in questo modo, cioè è formata dai punti fondamentali e dal punto unità di un opportuno riferimento proiettivo.

Consideriamo due spazi proiettivi $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$, e fissiamo i sistemi di coordinate $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\varphi' : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$; data una proiettvità $\psi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$, possiamo considerare la proiettività $\varphi'^{-1} \circ \psi \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$. Le equazioni di quest'ultima proiettività si dicono *equazioni della proiettività* ψ nei sistemi di coordinate φ e φ'. Se, ad esempio, (5.19) sono le equazioni matriciali di $\varphi'^{-1} \circ \psi \circ \varphi$, la proiettività φ agisce mandando un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ di coordinate omogenee $[\mathbf{X}]$ in φ nel punto $\psi(P)$ di coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}]$ in φ'. La matrice $\mathbf{A}$, determinata a meno di proporzionalità si dice *matrice di ψ nei sistemi di coordinate φ e φ'*.

In particolare se $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ si può prendere $\varphi = \varphi'$ e parlare di equazioni della proiettività ψ in φ. L'applicazione

$$\Phi_\varphi : PGL(\mathbf{V}) \to PGL(n+1, \mathbb{K})$$

che ad ogni proiettività ψ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in sè associa la matrice di ψ in φ (determinata a meno di proporzionalità) è un isomorfismo di gruppi.

Infine se $\varphi : \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^n(\mathbf{V})$ e $\varphi' : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono sistemi di coordinate in uno stesso spazio proiettivo, l'applicazione $\varphi'^{-1} \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è una proiettività di $\mathbb{P}^n_K$ in sè. Se (5.19) o (5.20) ne sono le equazioni, esse si dicono le *formule del cambiamento delle coordinate da* φ *a* φ'. Esse si interpretano nel modo seguente: se P è un punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente coordinate omogenee $[\mathbf{X}]$ in φ, lo stesso punto P ha coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}]$ in φ'. Si osservi che le nozioni di sottospazi proiettivi e di proiettività sono invarianti per cambi di sistemi di coordinate.

Concludiamo queste considerazioni generali sulle proiettività dimostrando il seguente:

Teorema 5.5.4. (Teorema fondamentale delle proiettività) *Dati due spazi proiettivi* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *e* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *della stessa dimensione* n*, siano* $(P_0, \dots, P_{n+1})$ *e* $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ *due* $n+2$*-ple di punti in posizione generale di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *e* $\mathbb{P}(\mathbf{V}')$*, rispettivamente. Allora esiste una e una sola proiettività* $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ *tale che* $\varphi(P_i) = Q_i$ *per ogni* $i = 0, \dots, n+1$.

Dimostrazione. Poniamo $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $Q_i = [\mathbf{w}_i]$ per ogni $i = 0, \dots, n+1$. Abbiamo una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, \dots, n+1$, se e solo se esiste una applicazione lineare iniettiva $\psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ ed esistono opportuni scalari λ_i, $i = 0, \dots, n+1$, tutti non nulli, tali che $\psi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$, per ogni $i = 0, \dots, n+1$. Poiché per ipotesi $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n)$ sono indipendenti, essi sono riferimenti di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ rispettivamente. Dunque scelti comunque gli scalari λ_i, $i = 0, \dots, n$, esiste ed è unica l'applicazione lineare $\psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ tale che $\psi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$, per ogni $i = 0, \dots, n$. Il problema è dunque quello di determinare $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tutti non nulli, in modo che esista poi uno scalare λ_{n+1}, ancora non nullo e tale che $\psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \mathbf{w}_{n+1}$. Osserviamo che $\mathbf{v}_{n+1}$ e $\mathbf{w}_{n+1}$ dipendono linearmente da $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n)$ rispettivamente, ossia si hanno relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= a_0 \mathbf{v}_0 + \ldots + a_n \mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_{n+1} &= b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + b_n \mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Notiamo che in tali relazioni $a_0, \dots, a_n$ sono tutti scalari non nulli. Se infatti fosse, ad esempio $a_i = 0$ avremmo che il sistema $[\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n]$ è linearmente dipendente e quindi tale sarebbe anche il sistema di punti $[P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{n+1}]$, contro l'ipotesi che i punti $(P_0, \dots, P_{n+1})$ siano in posizione generale. Similmente si verifica che $b_0, \dots, b_n$ sono tutti scalari non nulli. Ora la condizione richiesta sugli scalari $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ è che:

$$\psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \lambda_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = \lambda_{n+1}(b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + b_n \mathbf{w}_n) = \lambda_{n+1} b_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + \lambda_{n+1} b_n \mathbf{w}_n$$

e, contemporaneamente, che:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}_{n+1}) = \psi(a_0\mathbf{v}_0 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) &= a_0\psi(\mathbf{v}_0) + \ldots + a_n\psi(\mathbf{v}_n)\\ &= \lambda_0 a_0 \mathbf{w}_0 + \ldots + \lambda_n a_n \mathbf{w}_n.\end{aligned}$$

Per l'indipendenza lineare di $(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_n)$ queste due uguaglianze si traducono nella condizione seguente

$$\begin{cases}\lambda_0 a_0 - \lambda_{n+1} b_0 = 0\\ \ldots\\ \lambda_n a_n - \lambda_{n+1} b_n = 0\end{cases} \tag{5.23}$$

e questo si può interpretare come un sistema lineare $\mathcal{A}$ omogeneo di $n+1$ equazioni nelle $n+2$ incognite $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$. E' chiaro che una soluzione non nulla di $\mathcal{A}$ è tale che nessuna sua componente è nulla, e quindi essa dà luogo ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ con la proprietà richiesta. Inoltre soluzioni proporzionali e non nulle di $\mathcal{A}$ danno luogo alla stessa proiettività. Infine ogni proiettività $\varphi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{V}')$ con la proprietà richiesta si ottiene in tal modo. Per concludere la dimostrazione basta allora verificare che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{A}$ è un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{K}^{n+2}$. Ma ciò è chiaro, perché la matrice di $\mathcal{A}$ è data da:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & & -b_0\\ 0 & a_1 & \ldots & & -b_1\\ & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & -b_n\end{pmatrix} \tag{5.24}$$

e il suo minore determinato dalle prime $n+1$ colonne e da tutte le righe è $a_0 a_1 ... a_n$, che, come visto, è non nullo.

□

Immediata conseguenza del teorema fondamentale delle proiettività è il seguente:

Corollario 5.5.5. (Teorema fondamentale dei riferimenti) *Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n e sia $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ una $n+2$-pla di punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ in posizione generale. Esiste allora uno ed un solo sistema di coordinate $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ i cui punti fondamentali e punto unitario siano ordinatamente $P_0, \ldots, P_{n+1}$. In altre parole, $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ sono il riferimento di uno ed un solo sistema di coordinate.*

Dimostrazione. Come visto nell'esempio (5.5.3), i punti fondamentali e il punto unitario di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ costituiscono una $n+2$-pla $(U_0, \ldots, U_{n+1})$ in posizione generale. Per il teorema fondamentale delle proiettività, esiste una e una sola proiettività $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ tale che $\varphi(U_i) = P_i$, per ogni $i = 0, \ldots, n+1$; la φ è il sistema di coordinate richiesto.

□

5.6 Spazio proiettivo duale

Definizione 5.6.1. Se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, lo *spazio vettoriale duale* di $\mathbf{V}$ si denota con $\mathbf{V}^\star$ ed è costituito da

$$\mathbf{V}^\star = Hom(\mathbf{V}, \mathbb{K}) = \{f | f : \mathbf{V} \to \mathbb{K}, f \text{ applicazione lineare}\}$$

dotato della struttura di spazio vettoriale definita dalla somma puntuale:

$$\begin{array}{l}(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}), \\ (af)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}), \quad \forall f, g \in \mathbf{V}^\star, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \ \forall a \in \mathbb{K}.\end{array}$$

Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}^*$ ha la stessa dimensione (finita) di $\mathbf{V}$. Fissando $\{1_\mathbb{K}\}$ come base di $\mathbb{K}$, ogni scelta di un riferimento R in $\mathbf{V}$ permette di identificare $\mathbf{V}^\star$ con lo spazio vettoriale delle matrici con 1 riga e tante colonne quanta è la dimensione di $\mathbf{V}$, associando a $f \in \mathbf{V}^\star$ la matrice $M_R(f)$ che rappresenta f rispetto al riferimento R.

Definizione 5.6.2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\star)$ si dice *spazio proiettivo duale* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e si denota col simbolo $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$.

Uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ed il suo duale $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\star)$ hanno quindi la stessa dimensione. Pur essendo spazi proiettivi differenti, $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\star)$ sono legati tra loro. Per studiare meglio questa relazione, cerchiamo di interpretare geometricamente i punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Denotiamo con $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Costruiamo una applicazione biettiva naturale:

$$\eta : \mathcal{H} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$$

nel modo seguente. Se $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, il sottospazio $\mathbf{W}$ ha codimensione 1 in V ed esiste almeno una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ non nulla tale che Ker f $=\mathbf{W}$; inoltre, due siffatte applicazioni lineari f e f' sono necessariamente proporzionali, cioè esiste uno scalare $\lambda \neq 0$ tale che $f' = \lambda f$. Dunque ha senso definire

$$\eta(\mathbf{H}) = [f], \qquad \text{se } \mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \text{ e } f \in \mathbf{V}^* \text{ è tale che Ker } f = \mathbf{W},$$

dove $[f]$ è la classe di proporzionalità di f in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. L'applicazione η così definita è biettiva (controlla!), e la sua inversa è data da:

$$\eta^{-1}([f]) = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \quad \text{posto } \mathbf{W} = Kerf.$$

Mediante l'applicazione η possiamo quindi identificare $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ con $\mathcal{H}$, cioè *interpretare i punti dello spazio duale* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ *come gli iperpiani dello spazio* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Esempio 5.6.3. Se $\mathbf{V} = \mathbb{K}^{n+1}$, è possibile fissare come riferimento R in $\mathbf{V}$ il riferimento canonico E; grazie a tale scelta, ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ allora $\mathbf{V}^\star$ può essere identificata in modo naturale con $M_E(f) \in \mathbb{K}^{n+1}$; un elemento $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ viene identificato così con una $(n+1)$-pla ordinata di scalari $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$, con la condizione che $f(\mathbf{X}) = u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$.

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})^\star$ si denota con $\mathbb{P}^{n\star}_{\mathbb{K}}$ e prende il nome di *spazio proiettivo numerico duale* di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Denotiamo, come prima, con $\mathcal{H}$ l'insieme di tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Come visto nell'Esempio 5.3.1, ogni iperpiano $\mathbf{H}$ può essere definito da una equazione lineare omogenea non nulla $u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n = 0$ individuata a meno di multiplo per una costante non nulla. Dunque, $\mathbf{H}$ è il sottospazio proiettivo corrispondente al nucleo $\mathbf{W}$ della forma lineare $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^\star$ definita da $f(\mathbf{X}) = u_0X_0 + u_1X_1 + \ldots + u_nX_n$. I coefficienti dell'equazione omogenea di $\mathbf{H}$ individuano dunque il punto di $\mathbb{P}^{n\star}_{\mathbb{K}}$ corrispondente ad $\mathbf{H}$:

$\eta(\mathbf{H}) = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ se $\mathbf{H}$ ha equazione omogenea $u_0X_0+u_1X_1+\ldots+u_nX_n = 0$.

Inoltre, fissato un riferimento proiettivo $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, possiamo considerare l'applicazione:

$$\varphi^\star : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^{n\ \star}_{\mathbb{K}}$$

così definita: al punto $[u_0, \ldots, u_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ la $\varphi^\star$ associa l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente nel riferimento φ equazione data da: $u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0$. Questa applicazione è ben definita, in quanto se la $n+1$-pla $(u_0, \ldots, u_n)$ varia per proporzionalità, non cambia l'iperpiano definito dalla corrispondente equazione omogenea. Si verifica facilmente che l'applicazione $\varphi^\star$ è una proiettività e determina un riferimento in $\mathbb{P}^{n\ \star}_{\mathbb{K}}$, che si dice *riferimento duale* di φ; le coordinate relative al riferimento duale sono dette *coordinate duali* o *coordinate pluckeriane*.

Fissato un riferimento proiettivo $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, possiamo considerare l'applicazione:

$$\varphi^\star : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$$

così definita: al punto $[u_0, \ldots, u_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ la $\varphi^\star$ associa l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente nel riferimento φ equazione data da:

$$u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0 \tag{5.25}$$

Proposizione 5.6.4. *L'applicazione $\varphi^\star$ è una proiettività, e dunque determina un riferimento in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$, chiamato* riferimento duale *di φ.*

Dimostrazione. Sia $\psi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbf{V}$ l'applicazione lineare associata a φ. La ψ è determinata da un riferimento $R = (\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}$. Sia $R^\star = (\mathbf{v}_0^\star, \ldots, \mathbf{v}_n^\star)$ il riferimento duale di R (cfr. [1], capitolo 12, n. 3). Consideriamo l'isomorfismo $\psi^\star : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbf{V}^\star$ determinato da $R^\star$. Proviamo che la proiettività associata a $\psi^\star$ coincide con la $\varphi^\star$. Infatti se $[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, la proiettività associata a $\psi^\star$ manda $[a_0, \ldots, a_n]$ nel punto $[a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Interpretando questo punto come un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, esso è proprio l'iperpiano $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$

dove $\mathbf{W}$ è il nucleo della applicazione lineare $a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star$. Quindi un punto $[X_0\mathbf{v}_0 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ appartiene ad $\mathbf{H}$ se e solo se:

$$(a_0\mathbf{v}_0^\star + \ldots + a_n\mathbf{v}_n^\star)(X_0\mathbf{v}_0 + \ldots + X_n\mathbf{v}_n) = a_0X_0 + \ldots + a_nX_n = 0$$

Ciò prova che $\mathbf{H}$ è proprio l'iperpiano avente in φ equazione data da (5.25).

□

Osservazione 5.6.5. L'introduzione delle coordinate duali in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ permette di rappresentare abbastanza semplicemente le stelle di iperpiani: se $\mathbf{Z}$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, la *stella di iperpiani di asse o centro* $\mathbf{Z}$ è l'insieme di tutti gli iperpiani contenenti $\mathbf{Z}$, che viene denotato con $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$. La stella è *vuota* se $\mathbf{Z} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, si riduce ad un unico elemento se $\mathbf{Z}$ stesso è un iperpiano, prende il nome di *fascio di asse o centro* $\mathbf{Z}$ se $\mathbf{Z}$ ha codimensione 2.

Consideriamo un sottospazio $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ avente in φ equazioni date da:

$$\begin{cases} u_{00}X_0 + \ldots + u_{0,n}X_n = 0 \\ \ldots \\ u_{m0}X_0 + \ldots + u_{m,n}X_n = 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

Supponiamo, com'è lecito, che il sistema (5.26) sia normale, ossia che $\mathbf{Z}$ abbia dimensione $n - m - 1$. Le equazioni (5.26) definiscono allora $m + 1$ iperpiani indipendenti della stella $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ e tutti e soli gli iperpiani della stella dipendono linearmente da essi. In altri termini un iperpiano $\mathbf{H}$ appartiene a $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ se e solo se ha in φ equazione del tipo:

$$\lambda_0(u_{00}X_0 + \ldots + u_{0,n}X_n) + \ldots + \lambda_m(u_{m0}X_0 + \ldots + u_{m,n}X_n) = 0$$

con $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tutti nulli. Dunque un iperpiano $\mathbf{H}$ di coordinate duali $[u_0, \ldots, u_n]$ appartiene a $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ se e solo se esistono $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ non tutti nulli con

$$(u_0, \ldots, u_n) = \lambda_0(u_{00}, \ldots, u_{0,n}) + \ldots + \lambda_m(u_{m0}, \ldots, u_{m,n});$$

ciò equivale a dare una rappresentazione parametrica di $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ nelle coordinate duali $\varphi^\star$.

Formalizziamo quanto abbiamo scoperto:

Proposizione 5.6.6. *Per ogni sottospazio proiettivo* $\mathbf{Z}$ *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*, la stella* $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ *è un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ *e ha dimensione proiettiva*

$$\dim \mathcal{H}(\mathbf{Z}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathbf{Z} - 1.$$

Dimostrazione. Ricordiamo da [1], capitolo 12, n. 5, l'applicazione biettiva:

$$\delta : \mathcal{S}(\mathbf{V}) \to \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star)$$

tra l'insieme $\mathcal{S}(\mathbf{V})$ dei sottospazi di $\mathbf{V}$ e quello dei sottospazi di $\mathbf{V}^\star$, definita associando al sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ il sottospazio

$$\delta(\mathbf{W}) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}) = \{f \in \mathbf{V}^\star :\ \mathrm{Ker}\ f \supseteq \mathbf{W}\}.$$

Se $\mathbf{Z}$ è associato al sottospazio vettoriale $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$, allora $\mathcal{H}(\mathbf{Z})$ risulta associato a $\delta(\mathbf{W}) \subset \mathbf{V}^\star$. □

Esempio 5.6.7. Se $\mathbf{Z}$ è composto da un unico punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ di coordinate omogenee $[p_0, \ldots, p_n]$ in φ, la stella $\mathcal{H}(P)$ è costituita da tutti e soli gli iperpiani aventi in φ equazione $u_0X_0 + \ldots + u_nX_n = 0$ tale che

$$u_0p_0 + \ldots + u_np_n = 0 \tag{5.27}$$

Poiché $[u_0, \ldots, u_n]$ sono coordinate omogenee degli iperpiani in $\varphi^\star$, la (5.27) può essere interpretata come l'equazione in $\varphi^\star$ della stella $\mathcal{H}(P)$; più precisamente, $\mathcal{H}(P)$ *può essere interpretato come un iperpiano di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$.

Esempio 5.6.8. n=1 Nel caso della retta proiettiva numerica $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, gli iperpiani sono i punti e quindi $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ coincide con la retta duale $\mathbb{P}^{1\star}_K$. Se il P ha coordinate $[a, b]$ in un riferimento φ di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, lo stesso punto$P$, in quanto iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, ha in φ equazione $bX_0 - aX_1 = 0$. Quindi P ha nel riferimento duale $\varphi^\star$ coordinate $[b, -a]$.

n=2 Sia φ un riferimento di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ e siano r e r' due rette distinte di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ di equazioni $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$, $u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 = 0$ in φ. Le rette del fascio $\mathcal{F}$ determinato da r e r' sono tutte e sole le rette aventi in φ equazioni del tipo $\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2) = 0$, con λ e μ non entrambi nulli. Le rette di $\mathcal{F}$ corrispondono biunivocamente ai punti $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ nell'applicazione che a $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ associa la retta avente in φ equazione $\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2) = 0$. Questa applicazione determina un riferimento proiettivo nel fascio $\mathcal{F}$. Dato un punto P di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ avente in φ coordinate $[p_0, p_1, p_2]$ il fascio di rette $\mathcal{H}(P)$ di centro P ha in $\varphi^\star$ equazione $p_0u_0 + p_1u_1 + p_2u_2 = 0$, dove $[u_1, u_2, u_3]$ sono le coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{2\star}_{\mathbb{K}}$.

Dunque ci sono corrispondenze biunivoche naturali:

$$\{\textit{rette di } \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{punti di } \mathbb{P}^{2\star}_{\mathbb{K}}\};$$
$$\{\textit{punti di } \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{rette di } \mathbb{P}^{2\star}_{\mathbb{K}}\}.$$

Osservando che anche $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ è uno spazio proiettivo, è possibile considerarne il duale: i punti di $(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star)^\star = \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ possono essere interpretati come iperpiani dello spazio duale $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Ma vedremo subito che $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ *può essere identificato in modo naturale con* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$:

Proposizione 5.6.9. *Interpretando la stella $\mathcal{H}(P)$ come un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) &\to \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star}) \\ P &\mapsto \mathcal{H}(P). \end{aligned}$$

è un isomorfismo, detto isomorfismo naturale *di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ *su* $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mathbf{V}^{\star\star}$ è naturalmente isomorfo a $\mathbf{V}$ (cfr. [1], capitolo 12, n. 4) e l'isomorfismo naturale

$$\Psi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{\star\star}$$

è così definito: ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si associa l'elemento $\mathbf{v}^{\star\star} \in \mathbf{V}^{\star\star}$ tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\star\star} : \mathbf{V}^\star &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

L'applicazione Φ coincide con l'isomorfismo associato a Ψ; infatti, se $P = [\mathbf{v}]$ è un punto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, il punto $[\mathbf{v}^{\star\star}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star})$ è l'iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ definito da

$$\mathbf{H}^\star = \{[f] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})^\star : \mathbf{v}^{\star\star}(f) = f(\mathbf{v}) = 0\}$$

Ma, interpretando i punti $[f]$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$ come iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, vediamo che

$$\mathbf{H}^\star = \{\pi \in \mathcal{H} : P \in \pi\} = \mathcal{H}(P)$$

e ciò prova che l'isomorfismo associato a Ψ coincide proprio con la Φ. $\square$

Osserviamo esplicitamente che l'applicazione inversa della Φ è così definita: ad ogni iperpiano α di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$, che è una stella di iperpiani di centro un punto P, la Φ^{-1} associa il centro P della stella, che non è altro che l'intersezione di tutti gli iperpiani della stella; dunque:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{P}(\mathbf{V}^{\star\star}) &\to \mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \alpha &\mapsto P = \cap_{\mathbf{H}\in\alpha}\mathbf{H}. \end{aligned}$$

Riassumendo: denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})$ l'insieme di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e analoga notazione usiamo per i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Nasce così l'applicazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star) \\ \mathbf{Z} &\mapsto \mathcal{H}(\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Teorema 5.6.10. *L'applicazione $\mathcal{H}$ è biettiva e la sua inversa, che denotiamo con $\mathcal{H}^\star$, è così definita: ad ogni sottospazio $\mathbf{Z}^\star$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$, che è una stella di sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $\mathcal{H}^\star$ associa il suo centro $\mathbf{Z}$ che è l'intersezione di tutti gli iperpiani della stella $\mathbf{Z}^\star$, ossia:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\star : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \\ \mathbf{Z}^\star &\mapsto \mathbf{Z} = \cap_{\mathbf{H}\in\mathbf{Z}^\star}\mathbf{H}. \end{aligned}$$

L'applicazione $\mathcal{H}$ gode delle seguenti proprietà:

(a) per ogni coppia di sottospazi $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ tali che $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}'$, si ha $\mathcal{H}(\mathbf{Z}) \supseteq \mathcal{H}(\mathbf{Z}')$;

(b) per ogni sottospazio $\mathbf{Z}$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si ha

$$\dim \mathcal{H}(\mathbf{Z}) = n - \dim \mathbf{Z} - 1 \tag{5.28}$$

(l'espressione che compare a secondo membro della precedente formula si dice dimensione duale *della dimensione di $\mathbf{H}$);*

(c) per ogni coppia di sottospazi $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$ di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{Z} \cap \mathbf{Z}') &= \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \vee \mathcal{H}(\mathbf{Z}') \\ \mathcal{H}(\mathbf{Z} \vee \mathbf{Z}') &= \mathcal{H}(\mathbf{Z}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{Z}') \end{aligned} \tag{5.29}$$

(d) $\mathcal{H}^\star$ gode di analoghe proprietà.

Dimostrazione. Accanto alla applicazione $\delta : \mathcal{S}(\mathbf{V}) \to \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star)$ già ricordata nella dimostrazione della Proposizione 5.6.9, ci servirà anche [cfr. [1], capitolo 12, n. 5] l'applicazione:

$$\delta^\star : \mathcal{S}(\mathbf{V}^\star) \to \mathcal{S}(\mathbf{V})$$

che associa ad ogni sottospazio $\mathbf{W}^\star$ di $\mathbf{V}^\star$ il sottospazio $\delta^\star(\mathbf{W}^\star)$ di $\mathbf{V}$ intersezione dei nuclei di tutti gli elementi di $\mathbf{W}^\star$. L'applicazione $\mathcal{H}^\star$ può essere definita anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\star : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \mathbb{P}(\mathbf{W}^\star) &\mapsto \mathbb{P}(\delta^\star(\mathbf{W}^\star)) \end{aligned}$$

mentre, come visto nel corso della dimostrazione della proposizione (**??**), la $\mathcal{H}$ si può definire come:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) &\to \mathcal{S}(\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star) \\ \mathbb{P}(\mathbf{W}) &\mapsto \mathbb{P}(\delta(\mathbf{W})). \end{aligned}$$

Ora, poiché δ e $\delta^\star$ sono una inversa dell'altra (cfr. [1], proposizione (12.9), (c)), ne segue subito che $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\star$ sono anche esse una inversa dell'altra. Inoltre le proprietà (a), (b), (c) e (d) sono conseguenze immediate della già citata proposizione (12.9) di [1]. □

Esempio 5.6.11. Un iperpiano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ è un piano; se ha equazione $u_0X_0+u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3 = 0$ in un riferimento φ di $\mathbb{P}^3_K$, un piano ha per coordinate omogenee in $\varphi^\star$ proprio $[u_0, u_1, u_2, u_3]$. Come visto nell'Esempio 5.6.7, la stella di piani per un punto $P[\mathbf{p}]$ può essere interpretata come un piano di $\mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}$, definito dall'equazione: $p_0u_0+p_1u_1+p_2u_2+p_3u_3 = 0$: denotiamo con α_P tale piano di $\mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}$. Osserviamo che il punto P risulta essere l'intersezione di tutti i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ rappresentati in $\mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}$ da un punto di α_P. Se una retta r ha in φ equazioni:

$$\begin{cases} u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0 \\ u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3 = 0 \end{cases}$$

il fascio di piani di asse r è costituito da tutti e soli i piani aventi in φ equazione del tipo:

$$\lambda(u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3) + \mu(u'_0X_0 + u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3) = 0$$

con $[\lambda, \mu]$ coordinate omogenee nel fascio. D'altra parte, se $P[\mathbf{p}]$ e $Q[\mathbf{q}]$ sono due punti distinti di r, allora i piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ che contengono r sono esattamente quelli che contengono sia P che Q. Ricordando che un punto di $\mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}$ rappresenta un piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$, si ricava che un punto $\mathbf{u}$ di $\mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}$ rappresenta un piano di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$ contenente r se e solo se $\mathbf{u} \in \alpha_P \cap \alpha_Q$.

Una retta di $\mathbb{P}^{3\star}_K$ si interpreta dunque come fascio di piani di $\mathbb{P}^3_K$ avente come centro una retta di $\mathbb{P}^3_K$, un piano di $\mathbb{P}^{3\star}_K$ si interpreta come una stella di piani di $\mathbb{P}^3_K$ di centro un punto di $\mathbb{P}^3_K$.

Dunque ci sono corrispondenze biunivoche naturali:

$$\{\textit{piani di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{punti di } \mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}\};$$
$$\{\textit{rette di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{rette di } \mathbb{P}^{3\star}_{\mathbb{K}}\}.$$
$$\{\textit{punti di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}\} \leftrightarrow \{\textit{piani } \mathbb{P}^{2\star}_{\mathbb{K}}\}.$$

Il precedente teorema consente di mostrare un teorema di dualità per gli spazi proiettivi simile a quello ottenuto in [1], capitolo 12, n. 5, per gli spazi vettoriali.

Sia infatti $\mathfrak{P}$ una proposizione relativa ai sottospazi di uno spazio proiettivo di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, e che riguardi le loro intersezioni, i loro spazi congiungenti e le loro dimensioni: una tale proposizione si dice una *proposizione di carattere grafico.* Diremo *proposizione duale* di $\mathfrak{P}$ la proposizione $\mathfrak{P}^\star$ ottenuta dalla $\mathfrak{P}$ sostituendo in essa alle parole "spazio intersezione", "spazio congiungente", "contenuto", "contenente", "dimensione" rispettivamente le parole "spazio congiungente", "spazio intersezione", "contenente", "contenuto", "dimensione duale". Vale il:

Teorema 5.6.12. (Principio di dualità per gli spazi proiettivi.) *Una proposizione $\mathfrak{P}$ di carattere grafico è vera se e solo se è vera la duale $\mathfrak{P}^\star$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 12.11 di [1]. Se $\mathfrak{P}$ è vera per ogni spazio vettoriale, è vera in particolare anche in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Applicando allora la $\mathcal{H}^\star$ e tenendo conto del teorema 5.6.10, si vede che $\mathfrak{P}^\star$ è vera in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Analogamente se $\mathfrak{P}^\star$ è vera allora è vera anche $(\mathfrak{P}^\star)^\star = \mathfrak{P}$. □

Esempio 5.6.13. Consideriamo la seguente proposizione $\mathfrak{P}$ concernente rette di uno spazio proiettivo di dimensione 3:

$\mathfrak{P}$: siano r e r' due rette sghembe di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 3 su $\mathbb{K}$ e sia P un punto che non appartiene a nessuna delle due rette; esiste allora una e una sola retta r'' passante per P e complanare con ciascuna delle rette r e r'.

La dimensione duale di 1 in uno spazio di dimensione 3 è ancora 1, ossia, come si dice, il concetto di retta è *autoduale* in uno spazio di dimensione 3. Così pure è autoduale il concetto di rette sghembe (o di rette complanari). Infatti due rette sono sghembe se e solo se hanno intersezione vuota e il concetto duale è quello di due rette il cui spazio congiungente è tutto lo spazio di dimensione 3, il che accade se e solo se le rette hanno ancora intersezione vuota. Da tutto ciò segue che la duale di $\mathfrak{P}$ è la proposizione:

$\mathfrak{P}^\star$) siano r e r' due rette sghembe di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione 3 su $\mathbb{K}$ e sia π un iperpiano che non contiene né r né r'; esiste allora una e una sola r'' contenuta in π e complanare con ciascuna delle rette r e r'.

La proposizione $\mathfrak{P}^\star$ è vera e di facile verifica: r'' è la retta congiungente i punti $\pi \cap r$ e $\pi \cap r'$.

Ne segue che anche $\mathfrak{P}$ è vera. Una dimostrazione diretta di $\mathfrak{P}$ può essere ottenuta dualizzando la dimostrazione di $\mathfrak{P}^\star$. In questo caso la retta r'' si ottiene come intersezione dei due piani $P \vee r$ e $P \vee r''$.

Esempio 5.6.14. **Proiettività indotta tra spazi duali.** Siano $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ spazi vettoriali aventi la stessa dimensione finita $n+1$.

Proposizione 5.6.15. *Ogni proiettività $\psi : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}(\mathbf{W})$ induce una proiettività tra gli spazi duali $\psi^\star : \mathbb{P}(\mathbf{W})^\star \to \mathbb{P}(\mathbf{V})^\star$. Identificando i punti degli spazi duali con gli iperpiani degli spazi originali, si ha:*

$$\psi^\star(\mathbb{P}(\mathbf{U})) = \mathbb{P}(\psi_l^{-1}(\mathbf{U})) \tag{5.30}$$

se ψ_l è l'applicazione lineare associata a ψ. In particolare,

a) se ψ induce una proiettività di un iperpiano π in sè (cioè $\psi(\pi) \subset \pi$), l'iperpiano π corrisponde ad un punto fisso per $\psi^\star$.

$$\psi(\pi) = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \psi^\star(\pi) = \pi; \tag{5.31}$$

b) se ψ induce una proiettività di un sottospazio $\mathbf{H}$ di $\mathbf{V}$ (cioè $\psi(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$), l'immagine tramite $\psi^\star$ di ogni iperpiano della stella $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ di centro $\mathbf{H}$ appartiene ancora alla stessa stella:

$$\psi(\mathbf{H}) = \mathbf{H} \qquad \Rightarrow \qquad \psi^\star(\pi) = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{H}(\mathbf{H}). \tag{5.32}$$

Dimostrazione. Sia $\psi_l : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ l'applicazione lineare associata a ψ. Allora $\psi^\star$ è la proiettività associata all'applicazione trasposta:

$$\begin{aligned} \psi_l^\star : \mathbf{W}^\star &\to \mathbf{V}^\star \\ f \ &\mapsto f \circ \psi_l. \end{aligned}$$

Identificando i punti dei duali con gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ rispettivamente, si ha che $[f] = \mathbb{P}(\mathrm{Ker} f)$ e $\psi^\star([f]) = \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f \circ \psi_l))$: si ottiene la tesi osservando che $\mathrm{Ker}(f \circ \psi_l) = \psi_l^{-1}(\mathrm{Ker} f)$.

□

Nelle notazioni della Proposizione precedente, la scelta di un riferimento R di $\mathbf{V}$ ed un riferimento S di $\mathbf{W}$ permette di descrivere ψ_l tramite la matrice associata $\mathbf{A}$. Nei riferimenti duali, la matrice di $\psi_l^\star$ è la matrice trasposta $\mathbf{A}^t$.

Esempio 5.6.16. Fissati $a_0 \neq 1$ e $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, sia $\psi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ la proiettività indotta dall'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} \psi_l : \ \mathbb{K}^{n+1} &\to \mathbb{K}^{n+1} \\ \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a_0 X_0 \\ a_1 X_0 + X_1 \\ a_2 X_0 + X_2 \\ \vdots \\ a_n X_0 + X_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si indichi con $\mathbf{A}$ la matrice di ψ_l rispetto alle basi canoniche. Si vede facilmente che, per ogni $P \in \pi = \{X_0 = 0\}$, si ha $\psi(P) = P$. In particolare, $\psi(\pi) = \pi$ come iperpiano e π corrisponde ad un punto fisso per $\psi^\star$: si osservi che, infatti, il vettore $(1, 0, \ldots, 0)$ delle coordinate di π nel riferimento duale è un autovettore per $\psi_l^\star$.

Anche il punto Q di coordinate omogenee $[a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, che non appartiene a π per le ipotesi assunte, è fisso per ψ, essendo:

$$\mathbf{A} \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t = a_0 (a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t.$$

Un iperpiano α di coordinate duali $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ contiene Q se e solo se

$$(b_0, b_1, \ldots, b_n) \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t = 0;$$

allora, in accordo con la proposizione 5.6.14 anche $\psi_l^\star(\alpha)$, che ha coordinate $\mathbf{A}^t \cdot (b_0, b_1, \ldots, b_n)^t$, contiene Q:

$$\begin{aligned}&(b_0, b_1, \ldots, b_n) \cdot \mathbf{A} \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t = \\ &= a_0(b_0, b_1, \ldots, b_n) \cdot (a_0 - 1, a_1, a_2, \ldots, a_n)^t = 0.\end{aligned}$$

La stella di iperpiani per Q e l'iperpiano π corrispondono quindi ad un iperpiano e ad un punto tra loro disgiunti che vengono mutati in sè stessi nell'applicazione $\psi^\star$. L'ipotesi che ogni punto di π sia fisso per ψ, comporta anche che ogni iperpiano α per Q sia fisso per $\psi^\star$: infatti, $\alpha \cap \pi = \mathbf{H}$ è un sottospazio fisso per ψ e $\psi^\star(\alpha)$ deve contenere sia Q che $\mathbf{H}$. $\square$

5.7 Geometria affine e geometria proiettiva.

Facciamo una semplice osservazione: sia $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uno spazio proiettivo numerico su un campo $\mathbb{K}$, sia Ω un insieme e sia $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \Omega$ una biezione. Se identifichiamo Ω con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tramite la φ allora Ω stesso può essere riguardato come uno spazio proiettivo e φ come un isomorfismo. Si dice allora che φ determina una *struttura di spazio proiettivo* su Ω. Due strutture di spazio proiettivo su Ω, determinate dalle applicazioni $\varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \Omega$ e $\varphi' : \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \to \Omega$ saranno considerate *equivalenti* se l'applicazione $\varphi'^{-1} \circ \varphi : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ è un isomorfismo (e, in particolare, $n = m$). Se le due strutture sono equivalenti nel senso di cui sopra allora i due modi di riguardare Ω come spazio proiettivo sostanzialmente coincidono: ad esempio un sottoinsieme $\mathbf{H}$ di Ω è un sottospazio in una delle due strutture se e solo se lo è nell'altra e la dimensione è la stessa, ecc.

Sia ora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ lo spazio affine numerico di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$. Denotiamo con

$$\mathbb{A}^n_\infty$$

l'insieme i cui elementi sono le giaciture delle rette di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (spesso la giacitura viene chiamata anche *direzione* della retta). Gli elementi di $\mathbb{A}^n_\infty$ sono detti *punti impropri* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e sono in biezione con i sottospazi di dimenzione 1 di $\mathbb{K}^n$. Per distinguerli, i punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ vengono detti *punti propri.*

Vedremo ora che sull'insieme $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{A}^n_\infty$ esiste una struttura naturale di spazio proiettivo di dimensione n su K tale che $\mathbb{A}^n_\infty$ ne sia un iperpiano, detto *iperpiano improprio* o *iperpiano all'infinito* di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Lo spazio proiettivo $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \cup \mathbb{A}^n_\infty$ si denoterà col simbolo

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$$

e verrà detto *completamento proiettivo dello spazio affine* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

Fissiamo infatti un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, e consideriamo la applicazione

$$\varphi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \tag{5.33}$$

che agisce sul punto $[X_0, \ldots, X_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ nel seguente modo:

(a) se $X_0 \neq 0$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ associa a $[X_0, \ldots, X_n]$ il punto di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ avente in $\mathcal{R}$ coordinate cartesiane date da

$$x_1 = X_1/X_0, \ldots, x_n = X_n/X_0 \tag{5.34}$$

(b) se $X_0 = 0$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ associa a $[X_0, \ldots, X_n] = [0, X_1, \ldots, X_n]$ il punto di $\mathbb{A}^n_{\infty}$ corrispondente all'unica direzione avente numeri direttori $(X_1, \ldots, X_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$.

L'applicazione $\varphi_{\mathcal{R}}$ è una biezione e la sua applicazione inversa agisce nel seguente modo:

(a') se un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ sta in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ed ha coordinate cartesiane $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{R}$, ad esso è associato il punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ di coordinate omogenee $[1, x_1, \ldots, x_n]$;

(b') se un punto $d \in \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ sta in $\mathbb{A}^n_{\infty}$ e corrisponde ad una direzione avente numeri direttori $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathcal{R}$, ad esso è associato il punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ di coordinate omogenee $[0, x_1, \ldots, x_n]$.

La $\varphi_{\mathcal{R}}$ determina la struttura di spazio proiettivo su $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ da noi cercata. Infatti i punti di $\mathbb{A}_{\infty}$ corrispondono ai punti dell'iperpiano di equazione $X_0 = 0$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ e dunque $\mathbb{A}^n_{\infty}$ stesso è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ nella suddetta struttura. Tuttavia, poiché $\varphi_{\mathcal{R}}$ dipende ovviamente da $\mathcal{R}$, per dare senso a questa costruzione bisogna verificare che:

Proposizione 5.7.1. *Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono riferimenti cartesiani di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, allora $\varphi_{\mathcal{R}}$ e $\varphi'_{\mathcal{R}}$ determinano strutture equivalenti su $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$.*

Dimostrazione. Siano

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + c_n \end{cases} \tag{5.35}$$

le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Mostriamo che l'applicazione $\varphi'^{-1}_{\mathcal{R}} \circ \varphi_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ corrisponde alla proiettività di equazioni

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 \\ \rho Y_1 = c_1 X_0 + a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_n = c_n X_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \tag{5.36}$$

Sia infatti $[X_0, X_1, \ldots]$ un punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ tale che $X_0 = 0$. La sua immagine tramite $\varphi_{\mathcal{R}}$ è il punto di $\mathbb{A}^n_{\infty}$ corrispondente all'unica direzione avente numeri direttori $(X_1, \ldots, X_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$. Nel riferimento $\mathcal{R}'$ i numeri direttori della stessa direzione sono dati da

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \tag{5.37}$$

sicché $\varphi'_{\mathcal{R}}(\varphi_{\mathcal{R}}[0, X_1 \ldots, X_n])$ è il punto di coordinate omogenee

$$\begin{cases} Y_0 = 0 = X_0 \\ Y_1 = c_1X_0 + a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n = a_{11}X_1 + \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ Y_n = c_nX_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n = a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \tag{5.38}$$

Se invece $[X_0, \ldots, X_n]$ è tale che $X_{n+1} \neq 0$ allora la sua immagine tramite $\varphi_{\mathcal{R}}$ è il punto di $\mathbb{A}^n_K$ che ha in $\mathcal{R}$ coordinate $(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0)$. Lo stesso punto ha in $\mathcal{R}'$ coordinate cartesiane date da

$$\begin{cases} y_1 = c_1 + a_{11}(X_1/X_0) + \ldots + a_{1n}(X_n/X_0) \\ \ldots \\ y_n = c_0 + a_{n1}(X_1/X_0) + \ldots + a_{nn}(X_n/X_0) \end{cases} \tag{5.39}$$

sicché $\varphi'_{\mathcal{R}}(\varphi_{\mathcal{R}}[0, X_1 \ldots, X_n])$ è il punto di coordinate omogenee :

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_1 = c_1 + a_{11}(X_1/X_0) + \ldots + a_{1n}(X_n/X_0) \\ \ldots \\ Y_n = c_n + a_{n1}(X_1/X_0) + \ldots + a_{nn}(X_n/X_0) \end{cases} \tag{5.40}$$

ossia, moltiplicando per $X_0 \neq 0$, di coordinate omogenee date dalle (5.36). $\square$

Osserviamo che per ogni riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $\varphi_{\mathcal{R}}$ risulta un riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$, nel quale l'iperpiano improprio $\mathbb{A}^n_\infty$ ha equazione $X_0 = 0$. Questo riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ si dice *associato* ad $\mathcal{R}$ e si indica spesso con lo stesso simbolo $\mathcal{R}$. E' facile verificare che ogni riferimento di $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ in cui l'iperpiano improprio ha equazione $X_0 = 0$, è del tipo $\varphi_{\mathcal{R}}$, con $\mathcal{R}$ opportuno riferimento di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Le formule (5.34) si dicono *formule per il passaggio da coordinate omogenee a coordinate cartesiane* in un riferimento $\mathcal{R}$ e valgono per i punti propri ossia per i punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. La (5.36) fornisce invece la formula per il cambiamento delle coordinate omogenee nel passaggio da un riferimento $\mathcal{R}$ a uno $\mathcal{R}'$ laddove le coordinate cartesiane cambiano con le formule (5.35).

Proposizione 5.7.2. *(a) Sia* $\mathbf{S}$ *un sottospazio affine di* $\mathbb{A}^n_K$ *e sia* $\mathbf{S}_\infty \subseteq \mathbb{A}_\infty$ *l'insieme dei punti impropri di* $\mathbf{S}$ *(cioè delle giaciture di rette parallele ad* $\mathbf{S}$*). Allora* $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \cup \mathbf{S}_\infty$ *è un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$*. Precisamente se, in un dato riferimento* $\mathcal{R}$ *di* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*,* $\mathbf{S}$ *ha equazioni*

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + \ldots + u_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \ldots \\ u_{m1}x_1 + \ldots + u_{mn}x_n + b_m = 0 \end{cases} \tag{5.41}$$

$\mathbb{P}(\mathbf{S})$ *ha nel riferimento associato equazioni*

$$\begin{cases} b_1X_0 + u_{11}X_1 + \ldots + u_{1n}X_n = 0 \\ \ldots \\ b_mX_0 + u_{m1}X_1 + \ldots + u_{mn}X_n = 0 \end{cases} \tag{5.42}$$

(b) Viceversa, sia $\mathbf{H}$ *un sottospazio di* $\mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ *non contenuto in* $\mathbb{A}_\infty$*. Allora* $\mathbf{S} = \mathbf{H} \setminus (\mathbf{H} \cap \mathbb{A}^n_\infty)$ *è un sottospazio affine di* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *tale che* $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{H}$.

Dimostrazione. (a) Se $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ è soluzione del sistema (5.41), allora si ha che $[1, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ è soluzione di (5.42). Viceversa, se $(\xi_0, \ldots \xi_n)$ è soluzione di (5.42) allora o $\xi_0 \neq 0$, e in tal caso $(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0)$ è soluzione di (5.41), oppure $\xi_0 = 0$ e allora $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ è soluzione del sistema omogeneo associato a (5.41) ossia dà le componenti di un vettore parallelo alla giacitura di $\mathbf{S}$. Tutto ciò prova che (5.42) ha per soluzioni tutte e sole le coordinate omogenee in $\mathcal{R}$ dei punti di $\mathbb{P}(\mathbf{S})$.

(b) Supponiamo $\mathbf{H}$ abbia equazioni (5.42) in $\mathcal{R}$. Allora, come e facile verificare, $\mathbf{S}$ avrà equazioni (5.41) in $\mathcal{R}$, ed è allora chiaro per la (a) che $\mathbb{P}(\mathbf{S}) = \mathbf{H}$. □

Proposizione 5.7.3. *(a) Sia* $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *un isomorfismo di spazi affini. Esiste una e una sola proiettività*

$$\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$$

che prolunga la φ *e muta in sè stesso l'iperpiano all'infinito* $\mathbb{A}^n_\infty$*. Più precisamente se* φ *ha in un riferimento* $\mathcal{R}$ *equazioni date dalle (5.35), allora* $\mathbb{P}(\varphi)$ *ha nel riferimento associato equazioni date dalle (5.36).*

(b) Viceversa se $\psi : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}})$ *è una proiettività che muta in sè* $\mathbb{A}^n_\infty$ *allora la sua restrizione ad* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *è una affinità* $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *tale che* $\mathbb{P}(\varphi) = \psi$.

Dimostrazione. (a) Data la φ avente in $\mathcal{R}$ equazioni date dalle (5.35), la $\mathbb{P}(\varphi)$ si definisce appunto come la proiettività avente nel riferimento associato equazioni (5.36). L'unicità è una facile conseguenza del teorema fondamentale delle proiettività e si lascia per esercizio al Lettore.

(b) Sia $\mathcal{R}$ un riferimento di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e si consideri il riferimento ad esso associato. Supponiamo la ψ abbia in detto riferimento equazioni del tipo:

$$\begin{cases} \rho Y_0 = a_{00}X_0 + a_{01}X_1 \ldots + a_{0n}X_n \\ \rho Y_1 = a_{10}X_0 + a_{11}X_1 \ldots + a_{1n}X_n \\ \ldots \\ \rho Y_n = a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + \ldots + a_{nn}X_n \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}. \tag{5.43}$$

Poiché ψ fissa l'iperpiano di equazione $X_0 = 0$ si verifica immediatamente che deve essere $a_{01} = \ldots = a_{0n} = 0$. Allora deve essere $a_{00} \neq 0$ e quindi possiamo supporre $a_{00} = 1$. In definitiva la ψ viene ad avere equazioni del tipo (5.36) e perciò $\psi = \tilde{\varphi}$, dove φ è l'affinità che ha in $\mathcal{R}$ equazioni date dalla (5.35). □

Si identifichi ora $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con un iperpiano di $\mathbb{A}' = \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$. Sia P un punto di $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ che non appartiene a $\mathbb{A}^n_K$ e sia $\Sigma(P)$ la stella di rette di centro P. La stella $\Sigma(P)$ può essere identificata con $\mathbb{P}(\mathbf{V}(\mathbb{A}'))$ (associando ad ogni retta per P la sua unica intersezione con $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$) ed è quindi in modo naturale uno spazio proiettivo di dimensione n. Inoltre, abbiamo una applicazione naturale:

$$\varphi : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \Sigma(P) \tag{5.44}$$

definita come ι sui punti di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e come ι' su quelli di $\mathbb{A}^n_{\infty}$.

Proposizione 5.7.4. *φ è una proiettività.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismo possiamo supporre che $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ sia l'iperpiano di $\mathbb{A}'$ di equazione $X_0 = 1$ e P è l'origine $\mathbf{0}$, sicché $\Sigma(P)$ si identifica in modo naturale con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Un riferimento $\mathcal{R}$ su $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è quello in cui le coordinate di un punto $(1, x_1, \ldots, x_n)$ sono date proprio da $(x_1, \ldots, x_n)$. L'applicazione

$$\varphi^{-1}_{\mathcal{R}} : \mathbb{P}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \Sigma(P) \tag{5.45}$$

è allora proprio coincidente con l'applicazione φ, da cui l'asserto. □

Proposizione 5.7.5. *Sia $\mathbf{H}$ un iperpiano dello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Allora $\mathbb{A} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbf{H}$ ha una struttura naturale di spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$ tale che $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$, con $\mathbf{W}$ sottospazio vettoriale di dimensione n di $\mathbb{K}^{n+1}$. Riguardiamo $\mathbb{K}^{n+1}$ come spazio affine di dimensione $n+1$ e consideriamo un iperpiano $\mathbf{S}$ di $\mathbb{K}^{n+1}$ parallelo a W ma non passante per $\mathbf{0}$. L'iperpiano $\mathbf{S}$, come sappiamo, è isomorfo a $\mathbf{W}$ come spazio affine. Consideriamo ora l'applicazione $\varphi : \mathbf{S} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ che ad ogni punto $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ associa il punto $[\mathbf{v}]$ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. E' facile verificare (controlla!) che φ è iniettiva e la sua immagine è proprio $\mathbb{A} = \mathbb{P}(\mathbf{V}) \setminus \mathbf{H}$. Pertanto esiste su $\mathbb{A}$ una e una sola struttura di spazio affine tale che φ sia un isomorfismo. Dalla Proposizione 5.7.4 segue che $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(\mathbf{V})$. □

Esercizi svolti

SPAZI E SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Problema 5.1. Confronto tra punti *a) In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, discuti se i seguenti punti sono distinti o coincidenti: $P[1,-7]$, $Q[2,0]$, $T[2,-21]$, $V[5,0]$, $S[3,-21]$.*
b) In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, discuti se i seguenti punti sono distinti o coincidenti: $A[2-i,3+2i]$, $B[3+i,1+5i]$, $C[2+i,0]$, $D[3-4i,8+i]$, $E[1,0]$.

Soluzione. a) I punti distinti sono $P=S$, $Q=V$, T: infatti, $P=E$ perché $(3,-21)=3(1,-7)$, $Q=V$ perché $(2,0)=\frac{2}{5}(5,0)$ mentre P, Q e T sono a due a due distinti perchè

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2,\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & -21\end{pmatrix}=2,\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -21\end{pmatrix}=2.$$

b) I punti distinti sono $A=B=D$, $C=E$, T: infatti, $A=B$ perché $(3+i,1+5i)=(1+i)(2-i,3+2i)$ e $(3-4i,8+i)=(2-i)(2-i,3+2i)$, $C=E$ perché $(2+i,0)=(2+i)(1,0)$ mentre A ed E e sono distinti perchè

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2-i & 3+2i\\ 1 & 0\end{pmatrix}=2.$$

□

Problema 5.2. *In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n, considera un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ di dimensione r (con $1\le r\le n-1$). Dimostra che $\mathbb{P}(W)$ è contenuto in un iperpiano.*

Soluzione. Ogni base $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r$ di W può essere completata ad una n-pla $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r,\mathbf{v}_{r+1},\dots,\mathbf{v}_n$ di vettori linearmente indipendenti. Se poniamo $U=<\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_r,\mathbf{v}_{r+1},\dots,\mathbf{v}_n>$, il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U)$ è un iperpiano contenente $\mathbb{P}(W)$.

Problema 5.3. Equazioni parametriche e omogenee *Considera il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{w}_1=(1,0,1,1)$ e $\mathbf{w}_2=(2,0,-1,1)$. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, considera i sottospazi $S_1=\mathbb{P}(W)$, $S_2=\mathbb{P}(<\mathbf{w}_1>)$ ed S_3 definito dall'equazione $X_0+3X_1+X_2+X_3=0$.*
a) Determina la dimensione e la codimensione di S_1, S_2 e S_3, rispettivamente.
b) Determina una parametrizzazione di S_1 ed una per S_3.
c) Determina un sistema normale di equazioni omogenee per S_1.

Soluzione. a) In base alla definizione (vedi formule (5.4) e (5.7)),si calcolano $\dim(S_1)=\dim(W)-1=1$, codim $(S_1)=\dim(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})-\dim(S_1)=2$, $\dim(S_2)=\dim(<\mathbf{w}_1>)-1=0$ (infatti, S_2 è formato da un solo punto, $[\mathbf{w}_1]$). Per quanto riguarda S_3, poichè esso è definito da una singola equazione, esso è un iperpiano, cioè codim $(S_3)=1$, $\dim(S_3)=3-1=2$.
b) Per determinare una parametrizzazione di S_1, consideriamo la base $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ di W: i punti di S_1 sono tutti e soli i punti della forma: $[\mathbf{X}]=\lambda\mathbf{w}_1+\mu\mathbf{w}_2=$

$\lambda(1,0,1,1)+\mu(2,0,-1,1) = (\lambda+2\mu, 0, \lambda-\mu, \lambda+\mu)$ al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Per S_3, determiniamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione che definisce S_3, ed escludiamo la soluzione nulla: una parametrizzazione di S_3 è data da $[\mathbf{X}] = \lambda_0(3,-1,0,0)+\lambda_1(1,0,-1,0)+\lambda_2(1,0,0,-1)$, con $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0,0)$.
c) Poichè S_1 ha codimensione 2, un sistema di equazioni normali che definisce S_1 è composto da 2 equazioni. Per trovare un tale sistema, possiamo procedere in due modi.
Primo modo: a partire dall'equazione parametrica di S_1, procediamo eliminando i parametri. Da $\rho X_0 = \lambda + 2\mu$, $\rho X_1 = 0$, $\rho X_2 = \lambda - \mu$, $\rho X_3 = \lambda + \mu$, ricaviamo direttamente l'equazione $X_1 = 0$, (che è già libera da parametri). Sostituendo $\lambda = \rho X_2 + \mu$ nelle rimanenti equazioni, ricaviamo $\rho X_0 = \rho X_2 + 3\mu$, $\rho X_3 = \rho X_2 + 2\mu$. Ora sostituiamo $\mu = (\rho/2)(X_3 - X_2)$ nell'equazione $\rho X_0 = \rho X_2 + 3\mu$, e ricaviamo $\rho X_0 = \rho X_2 + 3(\rho/2)(X_3 - X_2)$, cioè, ricordando che ρ è per ipotesi una costante non nulla, $2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$. Dunque, un sistema normale di equazioni per S_1 è dato da $X_1 = 0, 2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$.
Secondo modo: ogni equazione omogenea in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è della forma

$$u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0.$$

Poichè $\mathbf{w}_1$ deve essere una soluzione, si deve avere $u_0 + u_2 + u_3 = 0$, mentre $\mathbf{w}_2$ come soluzione, impone la condizione $2u_0 - u_2 + u_3 = 0$. Dunque i coefficienti delle equazioni di S_1 sono tutte e sole le soluzioni non nulle del sistema $u_0 + u_2 + u_3 = 0, 2u_0 - u_2 + u_3 = 0$, che ha come soluzioni indipendenti $(0,1,0,0)$ e $(2,0,1,-3)$. Ritroviamo quindi, come sistema di equazioni normali per S_1 il sistema $X_1 = 0, 2X_0 + X_2 - 3X_3 = 0$. Notiamo che, ogni sistema equivalente di due equazioni omogenee sarebbe stato idoneo.

Problema 5.4. *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, considera la retta r la retta di equazione omogenea $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$. Determina equazioni parametriche per r.*

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$ in $\mathbb{C}^3$ sono date da $(\lambda, -3\lambda + 2\mu, \mu) = \lambda(1,-3,0) + \mu(0,2,1)$, con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Come equazioni parametriche di r troviamo dunque $[\mathbf{X}] = [\lambda, -3\lambda + 2\mu, \mu]$ con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$.

Problema 5.5. Punti indipendenti
a) In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, per ciascun insieme di punti, discuti se è formato da punti indipendenti: $G_1 = \{Q_0 = [1,0,1], Q_1 = [1,-1,1]\}$, $G_2 = \{Q_0, Q_1, Q_2 = [1,1,1]\}$, $G_3 = \{Q_0, Q_1, Q_3 = [1,0,3]\}$, $G_4 = \{Q_0, Q_1, Q_3, Q_4 = [2,1,1]\}$.
b) In $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, determina un insieme massimale di punti indipendenti nel sottospazio Z di equazioni $3X_0 - X_1 + X_2 - 2X_4 = 0, X_3 - X_4 = 0$.

Soluzione. a) I punti di G_1 (e, rispettivamente, di G_3) sono indipendenti perchè la matrice che ha per righe le coordinate omogenee dei punti corrispondenti ha rango 2 (rispettivamente, rango 3); i punti di G_2 sono dipendenti perchè le coordinate omogenee di Q_0, Q_1, Q_2 formano le righe di una matrice con determinante nullo, I punti di G_4 sono necessariamente dipendenti, perchè sono più della dimensione di $\mathbb{R}^3$.

b) Un insieme massimale di punti indipendenti in Z corrisponde ad una base dello spazio delle soluzioni del sistema $3X_0 - X_1 + X_2 - 2X_4 = 0, X_3 - X_4 = 0$, ed è formato da $5-2=3$ punti. Ad esempio, i punti $[1,3,0,0,0]$, $[1,0,-3,0,0]$, $[1,0,0,-3,-3]$ formano un sistema indipendente massimale.

Problema 5.6. *In $\mathbb{P}(V)$, mostra che i punti $Q_0, \ldots, Q_r$ sono dipendenti se e solo se esiste un sottospazio proiettivo Z di dimensione $< r$ che li contiene tutti.*

Soluzione. Sia $Q_0 = [\mathbf{v}_0], \ldots, Q_r[\mathbf{v}_r]$. Per la Definizione 5.3.4, i punti sono dipendenti se e solo se i vettori $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente dipendenti, cioè se e solo se lo spazio $W =< \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r >$ ha dimensione $\leq r$. Se i punti sono dipendenti, il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ ha dunque dimensione $\leq r-1$ (e contiene tutti i punti assegnati) . Viceversa, supponiamo che esista un sottospazio proiettivo Z di dimensione $\leq r-1$ che contiene i punti $Q_0, \ldots, Q_r$; ma allora $Z = \mathbb{P}(U)$ con $U \ni \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_r$, si deve avere $r \geq \dim U \geq \dim W$, e i punti $Q_0, \ldots, Q_r$ sono dipendenti.

SPAZIO CONGIUNGENTE E INTERSEZIONE

Problema 5.7. *In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, siano assegnati i punti $P[1+i,1,5,3]$ e $Q[3,i,1,i]$. Determinare equazioni parametriche e omogenee della retta r per P e Q.*

Soluzione. Osserviamo che i due punti sono distinti (perché le loro coordinate omogenee non sono proporzionali) e dunque la retta è univocamente individuata. Le equazioni parametriche su r sono date da:

$$\begin{cases} \rho X_0 = (1+i)\lambda + 3\mu \\ \rho X_1 = \lambda + i\mu \\ \rho X_2 = 5\lambda + \mu \\ \rho X_3 = 3\lambda + i\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \neq \mathbf{0}.$$

Per trovare un sistema di equazioni omogenee posso procedere a partire dalle equazioni parametriche, eliminando λ e μ. Alternativamente, basta prendere due equazioni lineari linearmente indipendenti, ottenute uguagliando a 0 i determinanti di sottomatrici 3×3 di

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1+i & 1 & 5 & 3 \\ 3 & i & 1 & i \end{pmatrix};$$

Ad esempio, vanno bene le equazioni $(1-5i)X_0 - (-14+i)X_1 + (-16+i)X_2 = 0$, $(5i-3)X_1 + 2i\,X_2 + (1-5i)X_3 = 0$ vanno bene.

Problema 5.8. *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, sia s la retta passante per i punti $S[-1,1,-2]$ e $T[2,-3,2]$.*

a) Determina equazioni parametriche e omogenee per la retta s.

b) Determina l'intersezione di s con la retta r di equazione omogenea $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$. Determina l'intersezione tra le rette r e s.

Soluzione. a) Ragionando come nell'Osservazione 5.9.6, si ricavano per s equazioni parametriche

$$\rho(X_0, X_1, X_2] = \sigma(-1, 1, -2) + \tau(2, -3, 2) = (-\sigma + 2\tau, \sigma - 3\tau, -2\sigma + 2\tau)$$

al variare di $(\sigma, \tau) \neq (0, 0)$ ed equazione omogenea:

$$det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} X_0 - det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X_1 + det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X_2 =$$

$$= -4X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

b) **Primo modo** L'intersezione tra r e s è definita dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} 3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \\ -4X_0 - 2X1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

di rango 2 in 3 indeterminate. Per il teorema di Rouché-Capelli, le soluzioni sono terne tra loro proporzionali. L'intersezione tra r e s è dunque costituita da un unico punto, le cui coordinate omogenee $[-3, 5, -2]$ si ricavano come nell'Osservazione 5.9.7:

$$X_0 = det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -3; X_1 = -det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 5; X_2 = det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -2.$$

Secondo modo I punti della retta s sono tutti e soli i punti della forma $[-\sigma+2\tau, \sigma-3\tau, -2\sigma+2\tau]$, al variare di $(\sigma, \tau) \neq (0, 0)$. Un tale punto appartiene (anche) ad r se ne soddisfa l'equazione omogenea; sostituendole equazioni parametriche dei punti di s nell'equazione omogenea di r si ricava l'equazione:

$$3(-\sigma + 2\tau) + (\sigma - 3\tau) - 2(-2\sigma + 2\tau) = 2\sigma - \tau = 0$$

da interpretarsi come equazione nei parametri $[\sigma, \tau]$ della retta s. Una soluzione particolare è data da $\sigma = 1$, $\tau = 2$, cui corrisponde il punto

$$[-1 + 2 \cdot 2, 1 - 3 \cdot 2, -2 + 2 \cdot 2] = [3, -5, 2] = [-3, 5, -2].$$

Problema 5.9. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. Mostra che, se un sottospazio $\mathbb{P}(W)$, di dimensione s, non è contenuto in un iperpiano H, allora $dim(\mathbb{P}(W) \cap H) = s - 1$.*

Soluzione. Segue immediatamente dalla Formula di Grassmann proiettiva (Teorema 5.3.8), o da una dimostrazione diretta.

Definizione 5.6. Sia J un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ che contengono J. L'insieme $< \mathrm{J} >= \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$ prende il nome di *sottospazio proiettivo generato da* J.

Problema 5.10. *Sia* $\mathrm{J} \neq \emptyset$ *un sottinsieme qualsiasi di* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.
a) Mostra che $< \mathrm{J} >$ *è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene* J.
b) Sia $\mathbf{W}$ *un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{V}$. *Allora risulta:* $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{W})$ *se e solo se* $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W}$.

Soluzione. a) $< \mathrm{J} >$ è un sottospazio proiettivo perchè è intersezione di sottospazi proiettivi. Se Z è un sottospazio proiettivo che contiene J, allora $< \mathrm{J} > \subseteq Z$. Ovviamente $< \mathrm{J} >= \mathrm{J}$ se e solo se J è un sottospazio proiettivo.
b) $\Rightarrow$) Se $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{W})$, allora $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \pi^{-1}(\mathbb{P}(\mathbf{W})) = \mathbf{W} \backslash \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathbf{W}$.
$\Leftarrow$) Sia $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W}$; allora vale, dato che $\mathbf{0} \notin \pi^{-1}(\mathrm{J})$, $\pi^{-1}(\mathrm{J}) \subseteq \mathbf{W} \backslash \{\mathbf{0}\}$, e quindi $\pi(\pi^{-1}(\mathrm{J})) = \mathrm{J} \subseteq \pi(\mathbf{W} \backslash \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{P}(\mathbf{W})$.

Problema 5.11. Fascio di rette per un punto *Determinare una equazione omogenea per ogni retta di* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *passante per il punto* $D[3, -1, 5]$.

Soluzione. Ogni retta del piano ha equazione omogenea $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ (con a, b, c non tutti nulli). Una tale retta passa per D se e solo se le coordinate omogenee di D sono soluzione dell'equazione omogenea, cioè quando $3a - b + 5c = 0$. Tale relazione va interpretata come equazione nei coefficienti a, b, c dell'equazione. Le soluzioni (a, b, c) formano un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di dimensione 3 di $\mathbb{C}^3$, una cui base è data da $(1, 3, 0)$ e $(0, 5, 1)$; soluzioni proporzionali corrispondono alla stessa retta e la soluzione nulla non corrisponde a nessuna retta. Si ricava che ogni retta per D ha equazione della forma:

$$\lambda(X_0 + 3X_1) + \mu(5X_1 + X_2) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Si dice che tali rette formano un *fascio di rette*.

Problema 5.12. Rette complanari o sghembe *In* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, *discutere se sono complanari o sghembe le seguenti rette* $r : 3X_0 + X_1 = 0, X_0 - X_2 + X_3 = 0$, $s : X_1 + X_2 - X_3 = 0, X_0 + X_3 = 0$.

Soluzione. **Primo modo** Su ciascuna delle due rette, si prendono due punti distinti: ad esempio, $A_1[0, 0, 1, 1]$, $A_2[1, -3, -1, 0] \in r$ e $B_1[0, 1, -1, 0]$, $B_2[-1, 0, 1, 1] \in s$. Le due rette sono sghembe se e solo se i quattro punti A_1, A_2, B_1, B_2 non sono complanari, cioè se

$$rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Poiché il rango è effettivamente 4, le rette r e s sono sghembe.
Secondo modo Le rette r e s sono complanari se e solo se $r \cap s \neq \emptyset$, se e solo se il sistema dato dalle 4 equazioni omogenee delle rette ammette una soluzione nulla, cioè tale sistema ha rango minore di 3. Poiché

$$rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

le rette sono sghembe.

PROIETTIVITÀ E SOTTOSPAZI

Problema 5.13. *Si consideri la proiettività φ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ in sè di equazioni*

$$\begin{cases} \rho Y_1 = X_1 + X_2 \\ \rho Y_2 = X_2 + X_3 \\ \rho Y_3 = X_3 \end{cases}$$

e la retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ di equazione $3X_1+2X_2+X_3=0$. Determinare una equazione omogenea per $\varphi(r)$.

Soluzione. La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} \kappa X_1 = Y_1 - Y_2 + Y_3 \\ \kappa X_2 = Y_2 - Y_3 \\ \kappa X_3 = Y_3 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione

$$3(Y_1 - Y_2 + Y_3) + 2(Y_2 - Y_3) + Y_3 = 0 \Leftrightarrow 3Y_1 - Y_2 + 2Y_3 = 0.$$

Problema 5.14. *Sia $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una proiettività avente equazioni*

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 - X_1 \\ \rho Y_1 = X_0 + X_1 + 2X_2 \\ \rho Y_2 = X_1 \end{cases} \tag{5.46}$$

a) Determinare equazioni parametriche per l'immagine tramite φ della retta r di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazioni parametriche $\rho(X_0, X_1, X_2) = (\lambda, 2\lambda - \mu, 2\mu)$ ($\rho \neq 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$).
b) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta s di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di equazione $X_0 - X_1 + 3X_2 = 0$.
c) Determinare equazioni omogenee per l'immagine tramite φ della retta t di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ passante per $D[6, -1, 0]$ e $E[1, -2, 1]$.

Soluzione. a) È sufficiente applicare φ ad ogni punto di r, sostituendo l'espressione data dalle equazioni parametriche di r nelle equazioni di φ:

$\varphi([\lambda, 2\lambda-\mu, 2\mu]) = [\lambda-(2\lambda-\mu), \lambda+(2\lambda-\mu), 2\lambda-\mu] = [-\lambda+\mu, 3\lambda-\mu), 2\lambda-\mu]$

Si ricavano le seguenti equazioni parametriche per $\varphi(r)$:

$$\rho(X_0, X_1, X_2) = (-\lambda + \mu, 3\lambda - \mu), 2\lambda - \mu) \qquad (\rho \neq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

b) Poichè φ è un isomorfismo, un punto $P[\mathbf{Y}]$ appartiene a $\varphi(r)$ se la sua antiimmagine (che coincide con la sua immagine attraverso la proiettività inversa φ^{-1}) appartiene a r, cioè $\varphi^{-1}([\mathbf{Y}])$ soddisfa l'equazione omogenea di r. La proiettività φ^{-1} ha equazioni

$$\begin{cases} \kappa X_0 = -2Y_0 - 2Y_2 \\ \kappa X_1 = -2Y_2 \\ \kappa X_2 = Y_0 - Y_1 + 2Y_2 \end{cases}$$

sicché la retta $\varphi(r)$ ha equazione omogenea

$$(-2Y_0 - 2Y_2) - (-2Y_2) + 3(Y_0 - Y_1 + 2Y_2) = 0 \text{ cioè } Y_0 - 3Y_1 + 6Y_2 = 0.$$

c) L'immagine $\varphi(t)$ è necessariamente una retta, che deve coincidere con la retta per $\varphi(D) = [7, 5, -1]$ e $\varphi(E) = [3, 1, -2]$, che ha equazione omogenea $\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 7 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -9X_0 + 11X_1 - 8X_2 = 0.$

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE PROIETTIVITÀ

Problema 5.15. Proiettività della retta *a) Determina le equazioni della proiettività* $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *tale che* $\varphi([1, 0]) = [2, 1]$, $\varphi([0, 1]) = [-1, 1]$, $\varphi([1, 1]) = [3, -2]$. *E' vero che* $\varphi([2, -1]) = [14, 18]$*?*
b) Determina le equazioni della proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *tale che* $\psi([2, 1]) = [1, 0]$, $\psi([-1, 1]) = [0, 1]$, $\psi([3, -2]) = [1, 1]$.

Soluzione. a) I tre punti $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$,$C = [1, 1]$ e i tre punti $A' = [2, 1]$, $B' = [-1, 1]$, $C' = [3, -2]$ sono a due a due distinti, quindi l'esistenza della proiettività cercata φ segue dal teorema fondamentale delle proiettività della retta proiettiva (Teorema 5.8.15). Posto $\varphi([X_0, X_1]) = [Y_0, Y_1]$, per definizione di proiettività esistono una matrice invertibile $M = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix}$ ed uno scalare non nullo ρ tali che $\begin{cases} \rho Y_0 = m_{00}X_0 + m_{01}X_1 \\ \rho Y_1 = m_{10}X_0 + m_{11}X_1 \end{cases}$. La richiesta $\varphi([1, 0]) = [2, 1]$ equivale ad imporre che la prima colonna di M sia proporzionale alle coordinate omogenee $(2, 1)$ di A' (con costante di proporzionalità non nulla). Analogamente, la richiesta $\varphi([0, 1]) = [-1, 1]$ equivale ad imporre che la seconda colonna di M sia proporzionale alle coordinate omogenee $(-1, 1)$ di B' (con costante di proporzionalità non nulla). Esistono dunque scalari non nulli λ e μ tali che $M = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$. La richiesta $\varphi([1, 1]) = [3, -2]$ equivale al fatto che $M(1, 1)^t$ sia proporzionale a $(3, -2)^t$.

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda & -\mu\\ \lambda & \mu\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\qquad \exists\rho\neq 0.$$

Gli scalari cercati sono soluzione del sistema

$$\begin{cases}2\lambda-\mu-3\rho=0\\ \lambda+\mu+2\rho=0\end{cases}{}'$$

le cui soluzioni non nulle sono tutte tra loro proporzionali, e proporzionali alla soluzione data da

$$\lambda_0=det\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=1,\mu_0=-det\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=-7,\rho_0=det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=3.$$

Sostituendo i valori λ_0 e μ_0 in M, si ricavano le equazioni di φ:

$$\rho\begin{pmatrix}Y_0\\Y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\end{pmatrix}.$$

Per controllare se $\varphi([2,-1])=[14,18]$, basta sostituire $X_0=2$, $X_1=-1$ nelle equazioni di φ. Si ricava che $\varphi([2,-1])=[7,9]=[14,18]$. La risposta è positiva.

b) La proiettività ψ è l'inversa della proiettività φ costruita al punto precedente. Le equazioni di ψ sono della forma $\tau\mathbf{Y}=N\mathbf{X}$, ove la matrice N è un multiplo non nullo dell'inversa di M (definita al punto precedente). Si ricava, ad esempio, $N=\begin{pmatrix}-7 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

□

Problema 5.16. *Determinare la proiettività* $\varphi:\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *tale che* $\varphi([-2,1])=[1,2]$, $\varphi([1,3])=[2,5]$, $\varphi([1,-2])=[1,-1]$.

Soluzione. I tre punti $A=[-2,1]$, $B=[1,3]$,$C=[1,-2]$ e i tre punti $A'=[1,2]$, $B'=[2,5]$, $C'=[1,-1]$ sono a due a due distinti, quindi l'esistenza della proiettività cercata φ segue dal teorema fondamentale delle proiettività (Teorema 5.8.15). La proiettività φ può essere determinata come composizione $\psi_2\circ\psi_1$ di due proiettività, ove ψ_1 sia definita da

$$\psi_1([-2,1])=[1,0],\psi_1([1,3])=[0,1],\psi_1([1,-2])=[1,1]$$

mentre ψ_2 sia definita da

$$\psi_1([1,0])=[1,2],\psi_1([0,1])=[2,5],\psi_1([1,1])=[1,-1]$$

Osserviamo che le equazioni delle proiettività ψ_1 e ψ_2 possono essere ricavate come nell'Esercizio svolto 5.23. In dettaglio, posto $\psi_1([X_0,X_1])=[X_0',X_1']$ e $B=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, esiste uno scalare non nullo ρ tale che

$$\rho \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, posto $\psi_2([X'_0, X'_1]) = [Y_0, Y_1]$ e $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, esiste uno scalare non nullo ν tale che

$$\nu \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X'_0 \\ X'_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M della composizione $\varphi([X_0, X_1]) = [Y_0, Y_1]$ si ricava tramite la relazione $M = T\,B = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -17 & -5 \end{pmatrix}$. Le equazioni di φ sono quindi

$$\tau \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ -17 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 5.17. Proiettività del piano *In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, considera i punti $A[1,1,0]$, $B[1,2,1]$, $C[1,-1,-1]$, $D[1,0,1]$.*
a) Mostra che i punti A, B, C, D sono in posizione generale.
b) Determina le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,0,0]) = A$, $\varphi([0,1,0]) = B$, $\varphi([0,0,1]) = C$, $\varphi([1,1,1]) = D$.

Soluzione. a) In base alla Definizione 5.3.4, occorre mostrare che, comunque scelti 3 punti distinti nella quaterna, essi risultano indipendenti. Poichè det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, i punti sono in posizione generale.

b) Poichè A, B, C, D sono in posizione generale per quanto provato nel punto precedente, esiste una ed una sola proiettività φ con le proprietà richieste in base al Teorema fondamentale delle proiettività 5.9.12. Sia $\mathbf{M}$ una matrice tale che $\varphi([\mathbf{X}]) = [\mathbf{M}\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}]$. La condizione $\varphi([1,0,0]) = A$ comporta che la prima colonna di $\mathbf{M}$ è proporzionale al vettore dele coordinate di A; analogamente le condizioni $\varphi([0,1,0]) = B$ e $\varphi([0,0,1]) = C$ comportano che la seconda e la terza colonna di $\mathbf{M}$ sono proporzionali, rispettivamente, ai vettori delle coordinate di B e C. Dunque $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda & 2\mu & -\nu \\ 0 & \mu & -\nu \end{pmatrix}$ $\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La condizione $\varphi([1,1,1]) = [\mathbf{M}(1,1,1)^t] = D$ comporta l'esistenza di uno scalare non nullo ρ tale che $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = \rho \\ \lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ \mu - \nu = \rho \end{cases}$, cioè $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ \mu - \nu - \rho = 0 \end{cases}$; una soluzione di tale sistema è data da $\lambda = 4$, $\mu = -3$,$\nu = -2$, $\rho = -1$. Sostituendo i valori trovati per λ, μ, ν nella matrice, si ricava

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ e le equazioni di φ sono:$\rho \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

PROIETTIVITÀ DEL PIANO E COPPIE DI RETTE

Assegnate due rette distinte r e s in $\mathbb{P}^2$, si vuole determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ che muta le due rette r e s in due rette distinte r' e s' preassegnate.

Notiamo che, per l'Osservazione 5.9.7, le rette r e s hanno un unico punto di intersezione, che denotiamo con H; analogamente, le rette r' e s' hanno un unico punto di intersezione, che denotiamo con H'. Osserviamo inoltre che ogni proiettività manda punti allineati in punti allineati e che, per il Teorema fondamentale delle proiettività 5.9.12, una proiettività del piano in se stesso è univocamente fissata se ne si conoscono le immagini di 4 punti in posizione generale.

È possibile dunque utilizzare una delle due seguenti strategie, osservando che le richieste non individuano univocamente φ. In particolare, assegnata una coppia di rette distinte r e s:

- In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ esiste sempre un riferimento in cui le rette abbiano equazione $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$. Inoltre esiste anche un riferimento in cui le rette abbiano equazioni $\tilde{Y}_1 + i\tilde{Y}_2 = 0$, $\tilde{Y}_1 - i\tilde{Y}_2 = 0$.
- In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ esiste sempre un riferimento in cui le rette abbiano equazione $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$. Inoltre esiste anche un riferimento in cui le rette abbiano equazioni $\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 = 0$, $\tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2 = 0$.

Primo modo Si fissano due punti distinti $A \neq H$ e $B \neq H$ in r e due punti distinti $A' \neq H'$ e $B' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(A) = A'$ e $\varphi(B) = B'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Analogamente, si fissano due punti distinti $C \neq H$ e $D \neq H$ in s e due punti distinti $C' \neq H'$ e $D' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(C) = C'$ e $\varphi(D) = D'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$, Il fatto che nessuno tra A, B, C, D coincida con H e che nessuno tra A', B', C', D' coincida con H' assicura che le due quaterne sono in posizione generale, ed è possibile applicare il Teorema fondamentale delle proiettività. Per un esempio, si rimanda all'Esercizio Svolto 5.18.

Secondo modo Si osserva che, necessariamente, deve valere la condizione $\varphi(H) = H'$. Si fissano un punto $A \neq H$ in r e un punto $A' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(A) = A'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Analogamente, si fissano un punto $B \neq H$ in r e un punto $B' \neq H'$ in r'. Imponendo che $\varphi(B) = B'$ ci si assicura che $\varphi(r) = r'$. Si scelgono $D \notin r \cap s$, con D non allineato a A e B, ed un punto e $D' \notin r' \cap s'$, con D non allineato a A' e B'. La scelta dei punti A, B, H, D e A', B', H', D' assicura che le due quaterne sono in posizione generale, ed è possibile applicare il Teorema fondamentale delle proiettività. Per esempi numerici, vedere gli Esercizi Svolti 5.19 e 5.20.

Problema 5.18. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_1 + X_2 = 0$ e $s : X_0 = 0$ rispettivamente. Determinare le equazioni di una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta r' di equazione $X_1 + X_2 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta s' passante per $C'[1, 0, 3]$ e $D'[1, 1, 1]$.*

Soluzione. Si fissino i punti $A[1, 0, 0]$ e $B[1, 1, 1]$ in r, osservando che non soddisfano l'equazione di s. Si fissino inoltre i punti $A'[0, 0, 1]$ e $B'[1, -1, 0]$ in r', osservando ciascuno di essi è indipendente da C' e D' (e dunque A' e B' non appartengono a s', e i punti A', B', C', D' sono in posizione generale). Infine, si scelgano due punti distinti $C[0, 1, 0]$ e $D[0, 0, 1]$ in s, osservando che i punti A, B, C, D risultano essere i punti fondamentali e il punto unità e, in particolare, sono in posizione generale.

Applicando il Teorema fondamentale delle proiettività 5.9.12, risulta determinata una unica proiettività φ tale che $\varphi(A) = A'$, $\varphi(C) = C'$, $\varphi(D) = D'$, $\varphi(B) = B'$.

Procedendo come nell'Esercizio Svolto 5.17, si mostra che φ ha equazioni $\rho\mathbf{Y} = M\mathbf{X}$, con

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.19. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 - X_1 = 0$ e $s : X_0 + X_2 = 0$ rispettivamente.*
a) Mostrare che le rette r e s sono distinte e determinare il punto di intersezione.
b) Determinare un cambio di coordinate omogenee $[\mathbf{Y}] = [M\mathbf{X}]$ rispetto al quale la retta r abbia equazione omogenea $Y_1 = 0$, mentre la retta s abbia equazione omogenea $Y_0 = 0$.

Soluzione. a) Per mostrare che le rette sono distinte, basta controllare che le equazioni omogenee di r e s non siano proporzionali, il che è vero perché $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, procedendo come nel punto c) dell'Esercizio Svolto 5.4, prendendo i minori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta

$$H = [det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = [-1, -1, 1] = [1, 1, -1].$$

b) Si fissi $C = H$ e si scelgano $A \neq C$ in r, $B \neq C$ in s e D esterno a r e s (in tal modo i punti A, B, C e D risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di C sia l'intersezione $C'[0, 0, 1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di A sia un punto $A' \neq C'$ con $X_2 = 0$, l'immagine di B sia un punto $B' \neq C'$ con $X_1 = 0$, l'immagine di D sia un punto D' con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $A[1,1,0]$, $B[0,1,0]$, $C[1,1,-1] = H$ e $D[1,0,1]$ siano due punti distinti $A'[1,0,0]$, $B'[0,1,0]$, $C'[0,0,1]$ e $D'[1,1,1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [N\mathbf{Y}]$. La matrice N sarà della forma

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} \lambda + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + \mu + \nu - \rho = 0\,. \\ -\nu - \rho = 0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = -1$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 1$, di modo che

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di N. Ad esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.20. *Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, si considerino le rette r e s di equazioni omogenee $r : X_0 + X_2 = 0$ e $s : X_0 - X_1 = 0$ rispettivamente. Determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi(r)$ sia la retta r' di equazione $X_0 + iX_1 = 0$ e $\varphi(s)$ sia la retta s' di equazione $X_0 - iX_1 = 0$.*

Soluzione. Osserviamo che le rette r e s sono distinte tra loro e si intersecano nel punto $H[1,1,-1]$; anche r' e s' sono distinte, e si intersecano in $H'[0,0,1]$. Le coordinate omogenee del loro punto di intersezione si determinano, ad esempio, procedendo come nel punto c) dell'Esercizio Svolto 5.4, prendendo i minori, a segno alterno, ottenuti cancellando a turno le colonne della matrice dei coefficienti. Risulta

$$H = [det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = [-1,-1,1] = [1,1,-1].$$

b) Si fissi $C = H$ e si scelgano $A \neq C$ in r, $B \neq C$ in s e D esterno a r e s (in tal modo i punti A, B, C e D risultano in posizione generale). Il cambio di coordinate cercato può essere ottenuto imponendo che l'immagine di C sia l'intersezione $C'[0,0,1]$ (è l'intersezione tra le immagini richieste), l'immagine di A sia un punto $A' \neq C'$ con $X_1 = 0$, l'immagine di B sia un punto $B' \neq C'$ con $X_0 = 0$, l'immagine di D sia un punto D' con prima e seconda coordinata entrambe non nulle. Ad esempio, è possibile scegliere $A[1,1,0]$, $B[0,1,0]$, $C[1,1,-1] = H$ e $D[1,0,1]$ siano due punti distinti $A'[1,0,0]$, $B'[0,1,0]$, $C'[0,0,1]$ e $D'[1,1,1]$.

Cerchiamo, per semplicità il cambio inverso $[\mathbf{X}] = [N\mathbf{Y}]$. La matrice N sarà della forma

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \nu \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \qquad \lambda\mu\nu \neq 0$$

con la condizione che esista $\rho \neq 0$ tale che $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ siano soluzione di

$$\begin{cases} \lambda + \nu - \rho = 0 \\ \lambda + \mu + \nu - \rho = 0\,. \\ -\nu - \rho = 0 \end{cases}$$

Una soluzione particolare $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \rho_0)$ si trova considerando i minori 3×3, con segni alterni, ottenuti cancellando le colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Risulta $\lambda_0 = 2$, $\mu_0 = -1$, $\nu_0 = -1$, $\rho_0 = 1$, di modo che

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice M cercata è un qualsiasi multiplo scalare non nullo dell'inversa di N. Ad esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

PROIETTIVITÀ E SOTTOSPAZI FISSI

Problema 5.21. Proiettività di $\mathbb{P}^3$ e coppie di rette *Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, si considerino due rette sghembe r e s.*
a) Mostra che esiste un riferimento nel quale r e s hanno, rispettivamente, equazioni omogenee $r : X_0 = X_1 = 0$ e $s : X_2 = X_3 = 0$.
b) Siano ora r la retta di equazioni $X_0 + X_2 + X_3 = 0, X_1 + X_3 = 0$ e s di equazioni $X_0 + X_1 + X_2 - X_3 = 0, X_1 - X_3 = 0$. Determina le equazioni di una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ tale che $\varphi(r)$ abbia equazioni $r : X'_0 = X'_1 = 0$ e $\varphi(s)$ abbia equazioni $s : X'_2 = X'_3 = 0$.

Soluzione. a) Osserviamo che le rette r e s sono distinte tra loro e non hanno punti di intersezione. Se $R_0 = [\mathbf{v}_0]$ e $R_1 = [\mathbf{v}_1]$ sono due punti distinti di r e $S_0 = [\mathbf{u}_0]$ e $S_1 = [\mathbf{u}_1]$ sono due punti distinti di s, i quattro punti

R_0, R_1, S_0, S_1 sono indipendenti in $\mathbb{P}^3$. Per il teorema fondamentale dei riferimenti, esiste dunque un riferimento nel quale i punti R_0, R_1, S_0, S_1 sono i punti fondamentali. La scelta di un tale riferimento dipende dalla scelta di un punto unità, e quindi non è univoca.
b) Scegliamo in r due punti distinti $R_0 = [1, 1, 0, -1]$, $R_1 = [0, 1, 1, -1]$ e in s due punti distinti $S_0 = [1, 1, 0, 1]$, $S_1 = [0, 1, 0, 1]$. Consideriamo la proiettività $\psi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ definita da $\mathbf{X}' \mapsto \mathbf{AX}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, verifica $\psi([1, 0, 0, 0]) = R_0$, $\psi([0, 1, 0, 0]) = R_1$, $\psi([0, 0, 1, 0]) = S_0$, $\psi([0, 0, 0, 1]) = S_1$. L'inversa di ψ ha le proprietà richieste, dunque possiamo porre $\varphi = \psi^{-1}$. Le equazioni di φ sono $\rho\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$.

Definizione 5.7. Sia $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Un punto P è *fisso* (o *unito*) per φ se $\varphi(P) = P$. Un sottospazio Z è *fisso* (o *unito*) per φ se $\varphi(Z) = Z$. Un sottospazio Z è *puntualmente fisso* (o *fisso punto a punto*) se $\varphi(P) = P \ \forall P \in Z$.

Ricordiamo che l'applicazione lineare $\varphi_l : V \to V$ associata ad una proiettività $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è necessariamente un isomorfismo. Un punto $P[\mathbf{v}]$ è fisso per φ se e solo se il vettore $\mathbf{v}$ è un autovettore per φ_l, cioè $\varphi_l(\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ per un opportuno $a \in \mathbb{K}$. Un sottospazio $Z = \mathbb{P}(W)$ è fisso se e solo se W è invariante per φ_l. Un sottospazio $Z = \mathbb{P}(W)$ è fisso punto per punto se e solo se W è contenuto in un autospazio di φ_l, cioè se W è invariante rispetto a φ_l e la restrizione $\varphi_{l|} : W \to W$ è una omotetia (cioè esiste $a \in \mathbb{K}$ con $\varphi_l(\mathbf{w}) = a\mathbf{w}$ $\forall \mathbf{w} \in W$).

Problema 5.22. *Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, si considerino due rette sghembe r. Mostra che esiste una proiettività non identica $\varphi : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ per la quale r e s sono puntualmente fissi.*

Soluzione. Ragionando come nell'Esercizio svolto 5.21, sappiamo che esiste un riferimento nel quale r ha equazioni $X_0 = X_1 = 0$, mentre s ha equazioni $X_2 = X_3 = 0$.

L'applicazione lineare associata $\varphi_l : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ che ha, nel riferimento scelto, la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, induce una proiettività φ con le proprietà richieste.

GEOMETRIA AFFINE E PROIETTIVA

Problema 5.23. *Nel piano euclideo, sia fissato un riferimento di coordinate* (x, y) *e si consideri la retta* r *di equazione* $3x + 5y - 3 = 0$.
a) Descrivere il sistema di coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ *sul completamento proiettivo* $\mathbb{P}(r)$ *di* r *associato al riferimento* $\mathcal{R} = (Q, (\mathbf{v})$*, ove* $Q(-1, 1)$ *e* $\mathbf{v}(5, -3)$.
b) Descrivere il sistema di coordinate omogenee $[Y_0, Y_1]$ *sul completamento proiettivo* $\mathbb{P}(r)$ *di* r *associato al riferimento di origine* $S(1, 0)$ *e vettore direttore* $\mathbf{w}(-10, 6)$. *c) Descrivere la relazione tra le coordinate omogenee* $[X_0, X_1]$ *e* $[Y_0, Y_1]$ *trovate nei punti precedenti.*

Soluzione. a) Il riferimento $\mathcal{R}$ associa, ad un punto $P(x, y) \in r$ la coordinata t definita da $x = -1 + 5t$, $y = 1 - 3t$. In particolare, ricaviamo che $t = \frac{x+1}{5}$. Il sistema di coordinate omogenee cercato è dato dunque da

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}(r) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ P(x, y) &\mapsto [1, \tfrac{x+1}{5}] = [5, x + 1] = [X_0, X_1] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1]. \end{aligned}$$

di inversa

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{P}(r) \\ [X_0, X_1] &\mapsto P(-1 + 5\tfrac{X_1}{X_0}, 1 - 3\tfrac{X_1}{X_0}) \ \text{ se } X_0 \neq 0 \qquad t = \frac{X_1}{X_0} \\ [0, 1] &\mapsto r_\infty. \end{aligned}$$

b) Il nuovo riferimento associa, ad un punto $P(x, y) \in r$ la coordinata s definita da $x = 1 - 10s$, $y = 6s$. In particolare, ricaviamo che $s = \frac{y}{6} = \frac{1-x}{10}$. Il sistema di coordinate omogenee cercato è dato dunque da

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(r) &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ P(x, y) &\mapsto [1, \tfrac{y}{6}] = [6, y] = [Y_0, Y_1] \\ r_\infty &\mapsto [0, 1]. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{P}(r) \\ [Y_0, Y_1] &\mapsto P(1 - 10\tfrac{Y_1}{Y_0}, 6\tfrac{Y_1}{Y_0}) \ \text{ se } Y_0 \neq 0 \\ [1, 0] &\mapsto r_\infty. \end{aligned}$$

c) Il cambio di coordinate si ottiene componendo φ con ψ^{-1}, osservando che $\psi^{-1}([X_0, X_1]) = (-1 + 5\frac{X_1}{X_0}, 1 - 3\frac{X_1}{X_0}) = (\frac{-X_0+5X_1}{X_0}, \frac{X_0-3X_1}{X_0}) = \varphi^{-1}[Y_0, Y_1]$:

$$\varphi \circ \psi^{-1}([X_0, X_1]) = \varphi(\frac{-X_0 + 5X_1}{X_0}, \frac{X_0 - 3X_1}{X_0}) = [X_0, 6X_0 - 18X_1] = [Y_0, Y_1].$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \rho Y_0 = X_0 \\ \rho Y_1 = 6X_0 - 18X_1 \end{cases} \qquad \exists \rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$$

Esercizi

SOTTOSPAZI PROIETTIVI

5.1. Nel piano proiettivo numerico reale, determinare equazione omogenea ed equazioni parametriche della retta r passante per $A[1,0,1]$ e $B[3,6,-3]$. Determinare inoltre l'equazione del fascio di rette per A.

5.2. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, considera la retta r di equazioni $X_0+3X_2=0, X_1+X_2+X_3=0$.
a) Determinare la mutua posizione di r e della retta s generata da $[1,0,1,1]$ e $[3,-1,0,0]$.
b) Determina equazione cartesiana e parametrica del piano generato da r e dal punto $[1,1,1,1]$.

5.3. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, determinare l'intersezione tra la retta di equazione parametrica

$$P = \lambda_0[0,1,-1,2] + \lambda_1[1,2,2,1]$$

e la retta s di equazione parametrica $P = \mu_0[1,3,1,3] + \mu_1[1,1,3,-1]$.

5.4. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, dire se esiste un piano contenente la retta s generata da $[2,1,-1,4]$, $[-1,0,3,4]$.

5.5. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, determinare l'intersezione tra il piano di equazione omogenea $X_0+X_1+X_2=0$ e la retta s generata da $[2,1,-1,4]$, $[-1,0,3,4]$ e la retta r di equazioni $X_0+X_3=0, X_1+X_2=0$.

PROIETTIVITÀ

5.6. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,0]) = [1,0]$, $\varphi([0,1]) = [3,1]$, $\varphi([1,1]) = [1,1]$. E' vero che $\varphi([2,5]) = [4,3]$?

5.7. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,2]) = [2,0]$, $\varphi([2,2]) = [3,1]$, $\varphi([-1,2]) = [1,1]$. E' vero che $\varphi([1,5]) = [1,7]$?

5.8. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,-2]) = [2,0]$, $\varphi([6,2]) = [3,2]$, $\varphi([-3,4]) = [1,-1]$.

5.9. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,0]) = [1,1,0]$, $\varphi([0,1]) = [3,0,1]$,$\varphi([1,1]) = [5,2,1]$. Determinare inoltre un sistema normale di equazioni cartesiane dell'immagine.

5.10. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1,3]) = [1,1,0]$, $\varphi([2,1]) = [-2,-1,1]$, $\varphi([1,1]) = [-1,0,1]$. Determinare inoltre la stella di iperpiani di centro l'immagine di φ.

5.11. Determinare la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che $\varphi([1,0,0]) = [1,-4,3]$, $\varphi([0,1,1]) = [0,1,1]$, $\varphi([0,1,-1]) = [0,2,0]$, $\varphi([2,3,-1]) = [1,0,0]$. Determinare l'immagine tramite φ della retta r generata da $[1,1,3]$ e da $[2,1,0]$.

5.12. Si consideri $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ con il riferimento standard. Siano H_1 la retta generata da $[1,0,1,3,0]$, $[0,1,0,-2,1]$ ed H_2 la retta generata da $[1,1,2,3,-1]$, $[1,0,0,1,1]$ Determinare le stelle di iperpiani di centro (risp.) H_1, H_2, $H_1 \vee H_2$.

5.13. Determinare una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ la cui immagine abbia equazioni: $X_1 - X_2 = O$.

5.14. Esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che l'immagine della retta r di equazione $X_0 - 3X_2 = 0$ sia la retta r' di equazione $X'_1 + X'_2 = 0$ e l'immagine della retta s di equazione $X_1 + X_2 = 0$ sia la retta s' di equazione $X'_0 - X'_1 + X'_2 = 0$?

PUNTI IN POSIZIONE GENERALE E SISTEMI DI COORDINATE

5.15. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, sono dati i punti di coordinate:

$$P_0[1,0,-2], \quad P_1[0,-1,-1], \quad P_2[2,0,1], \quad P_3[1,-2,5]$$

in un sistema di riferimento fissato. Mostrare che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono in posizione generale e determinare le formule di trasformazione dal sistema di riferimento originario al sistema che ha P_0, P_1, P_2, P_3 come punti fondamentali.

5.16. In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, si considerino i punti di coordinate:

$$P_0[1,1,0], \quad P_1[0,1,1], \quad P_2[1,-1,0], \quad P_3[0,1,-1]$$

in un sistema di riferimento fissato. Mostrare che i punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono punti fondamentali e punto unità in un riferimento proiettivo $\mathcal{R}$. Determinare le coordinate dei punti $Q_0[1,2,1]$ e $Q_1[1,7,0]$ in $\mathcal{R}$.

5.17. In $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sia fissato un riferimento $\mathcal{R}$. Descrivere in coordinate la proiezione di centro $A = [0,1,0]$ della retta r' di equazione $X_0 + X_1 = 0$ sulla retta r di equazione $X_21 + 2X_2 = 0$.

5.18. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4_{\mathbf{C}}$, dire quali tra i seguenti insiemi di punti sono indipendenti, quali sono in posizione generale e quali formano un sistema di riferimento:
a) $P_0 = [2,1,0,2,0]$, $P_1 = [1,1,1,1,1]$;
b) $P_0 = [2,1,0,2,1]$, $P_1 = [1,1,1,1,0]$, $P_2 = [4,0,2,-3,1]$;
c) $P_0 = [2,1,0,2,0]$, $P_1 = [1,1,1,1,1]$, $P_2 = [5,3,1,5,1]$, $P_3 = [0,1,0,0,0]$;
d) $P_0 = [1,3,0,8,0]$, $P_1 = [1,1,0,1,1]$, $P_2 = [0,0,1,0,1]$;
e) $S_0 = [1,1,1,0,8]$, $S_1 = [0,1,1,1,1]$, $S_2 = [0,1,0,3,1]$, $S_3 = [0,1,0,0,0]$, $S_4 = [0,3,0,0,2]$;
f) S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, $S_6 = [1,0,0,0,0]$.

5.19. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ si considerino i sottospazi generati rispettivamente dai punti:
a) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$;
b) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [4,5,2,10]$;
c) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$;
d) $P_0 = [2,3,0,8]$, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$, $P_3 = [1,0,0,0]$;
e) P_0, $P_1 = [1,1,1,1]$, $P_2 = [0,1,0,1]$, $P_3 = [1,0,0,0]$, $P_4 = [2,0,0,1]$.
Per ciascuno di tali sottospazi, determinare dimensione, equazioni parametriche ed un sistema normale di equazioni omogenee.

5.20. a) Dimostrare che esiste una proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\psi([1,2]) = [1,0,1,0],\ \psi([3,4]) = [1,2,0,1],$$
$$\psi([3,1]) = [2,2,1,1],\ \psi([0,1]) = [8,6,5,3].$$

b) Determinare un sistema normale di equazioni dell'immagine di ψ.

5.21. Esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che l'immagine del piano π di equazione $X_0 - 3X_2 = 0$ sia il piano π' di equazione $X_1' + 4X_2' = 0$ e l'immagine della retta s di equazioni $X_0 + X_3 = 0, X_1 + X_2 = 0$ sia la retta s' di equazioni $X_0' - X_1' = 0, X_3' + X_2' = 0$? In caso positivo, determinare una tale proiettività e discuterne l'unicità.

5.22. Sia φ una proiettività dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ in sè, tale che l'insieme dei suoi punti fissi (cioè i punti $P \in \mathbb{P}^3$ con $\varphi(P) = P$) sia formato da due rette disgiunte r ed s. Mostrare che, per ogni Q in $\mathbb{P}^3$, la coppia di punti Q, $\varphi(Q)$ appartiene ad una retta che interseca propriamente sia r che s.

5.23. a) Dimostrare che esiste una proiettività $\psi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\psi([1,2]) = [1,0,1,0],\ \psi([3,4]) = [1,2,0,1],$$
$$\psi([3,1]) = [2,2,1,1],\ \psi([0,1]) = [8,6,5,3].$$

b) Determinare un sistema normale di equazioni dell'immagine di ψ.

SPAZIO PROIETTIVO DUALE

5.24. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, siano assegnati i punti $P[2,1,2]$ e $Q[1,0,7]$. Determinare, nel piano proiettivo duale $(\mathbb{P}^2)^*$ con riferimento duale, le coordinate proiettive del punto corrispondente alla retta r per P e Q. Determinare inoltre equazioni parametriche e cartesiane della retta di $(\mathbb{P}^2)^*$ corrispondente al punto P.

5.25. Si considerino i punti come nell'esercizio 5.19.
i) Determinare la stella di iperpiani di centro il punto P_0 come in a). Descriverne inoltre le coordinate (nel riferimento duale del riferimento standard) interpretando la stella come sottospazio di $(\mathbb{P}^3)^\star$.

ii) Determinare la stella di iperpiani avente come centro il sottospazio di cui al punto a) e le sue equazioni come sottospazio del duale.
iii) Nel punto e) un piano per P_0, P_1, P_2, può contenere la retta generata da P_3 e P_4?

5.26. Si consideri $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ con il riferimento standard. Determinare equazioni cartesiane e parametriche in $(\mathbb{P}^3)^\star$ (rispetto al riferimento duale) del fascio di iperpiani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ di centro la retta generata da $[1, 1, 5, 0]$, $[1, 0, -2, 1]$. Esiste un iperpiano di tale fascio che passi per $[0, 1, 1, 0, 0]$?

5.27. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$. Sia $Z =< Q_1, Q_2 >$ il sottospazio generato dai seguenti punti di $\mathbb{P}^3$:

$$Q_1 = [1, 0, 3, 0, -2]$$
$$Q_2 = [0, 2, 0, 1, -1]$$

a) Determinare un sistema normale di equazioni per il sottospazio Z.
b) Determinare una rappresentazione parametrica della stella di iperpiani $\mathcal{H}(Z)$ di centro H.
c) Determinare un sistema di equazioni normali in $(\mathbb{P}^3)^\star$ per $\mathcal{H}(Z)$.

GEOMETRIA AFFINE E PROIETTIVA

5.28. Determinare le equazioni (nel riferimento usuale) della proiettività indotta tra i completamenti proiettivi dall'affinità $\varphi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di equazioni $x' = 2x + y, y' = x - y$.

5.29. Nel completamento proiettivo dello spazio affine numerico di dimensione 3, determinare l'equazione cartesiana del completamento del piano affine $x + 3y = 3$ ed una equazione parametrica del completamento della retta affine di equazioni $x + 2z = 1, y + z = 2$.

5.30. Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Determinare un sistema di coordinate omogenee sul completamento proiettivo della retta $x = 0$.

5.31. Nel piano euclideo reale, sia fissato un sistema di coordinate (x, y). Sia r la retta di equazione $3x - 2y = 0$.

a) Determinare il sistema di coordinate omogenene $[X_0, X_1]$ associato al riferimento di r dato da $(O, \mathbf{v} = (2, 3))$.

b) Determinare il sistema di coordinate omogenene $[X_0', X_1']$ associato al riferimento di r dato da $(A(4, 6), \mathbf{w} = (-12, -18))$.

c) Determinare il cambio di coordinate omogenee che lega le coordinate $[X_0, X_1]$ e $[X_0', X_1']$ definite ai punti precedenti.

COMPLETAMENTO PROIETTIVO

5.32. Nel piano affine, sia assegnato un sistema di riferimento cartesiano, con coordinate (x, y). Si assegni, nel completamento del piano, il sistema di coordinate omogenee associato $[X_0, X_1, X_2]$.
a) Determina le coordinate omogenee di $P(3, 2)$.
b) Determina l'equazione omogenea del completamento proiettivo $\mathbb{P}(s)$ della retta affine s di equazione $5x - 7y + 12 = 0$ e calcolane il punto improprio.
c) Determina l'equazione omogenea della retta passante per P e avente lo stesso punto improprio di $\mathbb{P}(s)$ (notazioni dei punti precedenti).
d) Determinare l'equazione affine della retta il cui completamento proiettivo ha equazione $2X_1 - X_2 + 4X_0 = 0$.