1

Spazi Affini

In questo capitolo introduciamo la nozione di spazio affine, un ambiente più generale dello spazio euclideo. Per motivare la definizione, rivediamo lo studio dello spazio euclideo, introducendo la nozione di vettore libero. Notiamo che i vettori liberi formano uno spazio vettoriale reale; inoltre, utilizzandolo come modello, possiamo ricostruire e descrivere lo spazio euclideo e i suoi sottospazi, i punti, le rette e i piani.

Seguendo questo esempio, introduciamo gli spazi affini che ne costituiscono una generalizzazione.

1.1 I vettori geometrici

Consideriamo l'insieme formato dai *punti* dello spazio della geometria euclidea, che verrà sempre indicato nel seguito con il simbolo $\mathbb{E}$. I suoi elementi, i punti, sono indicati con lettere maiuscole, come ad esempio P, Q, A, B.

Dati due punti distinti P e Q di $\mathbb{E}$, denotiamo con $\overline{PQ}$ il *segmento* che congiunge P e Q e con r_{PQ} la retta passante per P e Q.

Definizione 1.1.1. Dati due punti distinti P e Q di $\mathbb{E}$, un *verso* nel segmento $\overline{PQ}$ è un ordine nell'insieme $\{P, Q\}$.

Il segmento $\overline{PQ}$, con $P \neq Q$, ammette due possibili versi, corrispondenti alle coppie ordinate (P, Q) e (Q, P). Possiamo interpretare la scelta di un verso come l'indicazione di *verso di percorrenza lungo il segmento* $\overline{PQ}$ e, più in generale, come un *verso di percorrenza sulla retta* r_{PQ} passante per P e Q.

Il segmento $\overline{PQ}$, dotato della scelta di un verso, viene detto *segmento orientato* o *vettore applicato*; una definizione più precisa è la seguente:

Definizione 1.1.2. Dati due punti distinti P e Q, il *vettore applicato di punto iniziale* P e *punto finale* Q è il segmento individuato dalla coppia ordinata $(P,\ Q)$; esso viene indicato con il simbolo

$$\overrightarrow{PQ} \quad (\text{o anche con } Q - P)$$

e viene rappresentato graficamente tramite una freccia che congiunge P e Q, orientata da P a Q, come nella figura 1.1.
In un vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$, il punto iniziale P è detto anche *punto di applicazione*, o *primo estremo*, mentre il punto finale è detto anche *secondo estremo*.
Il vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ può essere interpretato come lo spostamento del punto P sul punto Q.

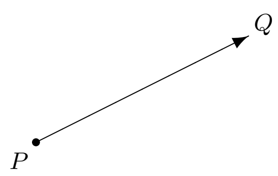

Figura 1.1. Vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$

La definizione di vettore applicato si estende al caso in cui il punto iniziale P e il punto finale Q coincidono:

Definizione 1.1.3. Se P è un punto, il vettore applicato $\overrightarrow{PP}$ coincide con il punto P e viene detto il *vettore nullo applicato in* P.

Indicheremo con il simbolo

$$\mathcal{A}_{\mathbb{E}}$$

l'insieme di tutti i vettori applicati con punto iniziale e finale in $\mathbb{E}$ (compresi i vettori nulli); analogamente, indicheremo con $\mathcal{A}_r$ (risp., $\mathcal{A}_\pi$) l'insieme dei vettori applicati aventi punto iniziale e punto finale su una retta r (risp., su un piano π) dello spazio $\mathbb{E}$.
Infine, useremo il simbolo $\mathcal{A}$ per indicare uno qualsiasi tra gli insiemi $\mathcal{A}_r$,$\mathcal{A}_\pi$, $\mathcal{A}_{\mathbb{E}}$, qualora il discorso valga per ciascuno di essi.

Nell'insieme dei vettori applicati $\mathcal{A}$ viene introdotta una relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*:

Definizione 1.1.4. Due vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ sono *equipollenti* se sono entrambi nulli oppure sono entrambi non nulli e valgono le seguenti proprietà:

(E1) i segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ sono congruenti e giacciono su rette parallele eventualmente coincidenti;
(E2) se i punti P, Q, P' e Q' appartengono ad una stessa retta, allora esiste un verso di percorrenza della retta rispetto al quale il punto P precede il punto Q e il punto P' precede il punto Q';

(E3) se invece i punti P, Q, P' e Q' non appartengono alla stessa retta, allora $P \neq P'$ e i punti Q e Q' appartengono allo stesso semipiano tra i due definiti dalla retta $r_{PP'}$ passante per P e P'.

Due vettori sono quindi equipollenti se i corrispondenti segmenti giacciono su rette parallele (eventualmente coincidenti) e possono essere sovrapposti (in modo che ordinatamente i primi e i secondi estremi coincidano) muovendo una delle due rette senza deformarla e lasciandola sempre parallela a quella originaria.

La definizione diviene più familiare modificando la terminologia:

Definizione 1.1.5. Diciamo che due vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ hanno
(a) la stessa *lunghezza* se i segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ sono congruenti.
(b) la stessa *direzione* se giacciono su rette parallele eventualmente coincidenti.

Definizione 1.1.6. Due vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ non nulli che hanno la stessa direzione, hanno lo stesso *verso* (e sono *concordi*) se per essi valgono (E2) o (E3). Due vettori con la stessa direzione che non siano concordi, sono detti *discordi.*

Con questa terminologia, *due vettori non nulli sono equipollenti se e solo se hanno la stessa direzione, la stessa lunghezza e lo stesso verso.*

Si osservi che due segmenti hanno la stessa lunghezza se e solo se la loro lunghezza coincide in una qualsiasi unità di misura di lunghezza.

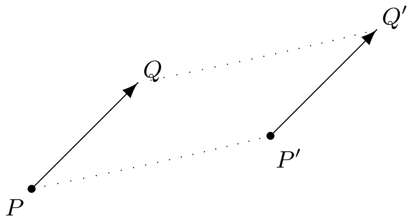

Figura 1.2. Due vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ equipollenti.

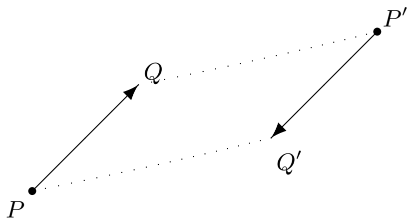

Figura 1.3. Due vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ con la stessa direzione e la stessa lunghezza ma non equipollenti.

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza. Infatti, la relazione è riflessiva perché ogni vettore applicato è equipollente a se stesso; la relazione è transitiva, perché se $\overrightarrow{PQ}$ è equipollente a $\overrightarrow{P'Q'}$, allora $\overrightarrow{P'Q'}$ è equipollente a $\overrightarrow{PQ}$; infine, la relazione è transitiva perché se $\overrightarrow{PQ}$ è equipollente a $\overrightarrow{P'Q'}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ è equipollente a $\overrightarrow{P''Q''}$, allora $\overrightarrow{PQ}$ risulta equipollente a $\overrightarrow{P''Q''}$.

Definizione 1.1.7. Un *vettore geometrico libero* è una classe di vettori applicati equipollenti. La classe di equivalenza di un vettore $\overrightarrow{PQ}$ viene indicata con il simbolo $\mathbf{PQ}$ (o con $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$, oppure $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$). I vettori applicati nulli formano una classe di equivalenza, detta *vettore nullo* e denotata con $\mathbf{0}$.[1]

Spesso chiameremo semplicemente *vettori* i vettori geometrici liberi.

Fissata una unità di misura, possiamo assegnare una *lunghezza* (sempre positiva o nulla) a ciascun vettore applicato: *un vettore libero non nullo è dunque individuato da una direzione, una lunghezza strettamente positiva e un verso.* Per definizione, il vettore nullo $\mathbf{0}$ ha lunghezza nulla, e direzione e verso indeterminati.

Definizione 1.1.8. Denotiamo l'insieme dei vettori geometrici di $\mathbb{E}$ con il simbolo

$$\mathcal{V}_{\mathbb{E}} = \{\mathbf{PQ} : P, Q \in \mathbb{E}\}$$

e indichiamo i suoi elementi anche con lettere minuscole in grassetto, come $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$, diciamo che il vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ rappresenta $\mathbf{v}$. Se r e π sono, rispettivamente, una retta e un piano di $\mathbb{E}$, introduciamo gli insiemi

$$\mathcal{V}_r = \{\mathbf{PQ} : P, Q \in r\}\,, \qquad \mathcal{V}_\pi = \{\mathbf{PQ} : P, Q \in \pi\}.$$

Come per i vettori applicati, utilizzeremo il simbolo $\mathcal{V}$ qualora l'asserto valga per ciascuno di essi, oppure per alleggerire la notazione.

La proposizione seguente permette di interpretare un vettore libero $\mathbf{v}$ come un movimento dello spazio: un (qualunque) punto P viene spostato nell'unico punto Q tale che $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$:

Proposizione 1.1.9. *Dati un vettore geometrico* $\mathbf{v}$ *e un punto* P *dello spazio* $\mathbb{E}$*, esiste un unico punto* $Q \in \mathbb{E}$ *tale che* $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, solo il vettore nullo applicato in P appartiene alla classe di equipollenza $\mathbf{v}$, e dunque $Q = P$ è il punto cercato. Se invece $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si consideri la retta r_{AB} passante per i due estremi A e B di un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ appartenente alla classe di equipollenza $\mathbf{v}$. Sulla retta r passante per P e parallela ad r_{AB}, esiste un unico punto Q tale che il vettore applicato $\overrightarrow{PQ}$ sia congruente e concorde a $\overrightarrow{AB}$. □

In particolare, la proposizione 1.1.9 ci dice che, comunque fissato $P \in \mathbb{E}$, l'applicazione $Q \mapsto \mathbf{PQ}$ è una biezione tra $\mathbb{E}$ e $\mathcal{V}$.

[1] Nel libro di Franchetta, viene usato il simbolo $\{PQ\}$ per indicare un vettore libero.

1.2 Lo spazio della geometria euclidea

Nell'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici liberi definiremo una operazione, che chiameremo *somma*, che ad ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ associa un terzo vettore, indicato con il simbolo $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Inoltre, ad ogni coppia formata da un numero reale a ed un vettore libero $\mathbf{v}$ assoceremo un vettore libero, che indicheremo con il simbolo $a\,\mathbf{v}$ e chiameremo *prodotto o moltiplicazione del vettore* $\mathbf{v}$ *per il numero reale* a. I numeri reali verranno spesso chiamati *scalari*.

Definizione 1.2.1. Somma di vettori liberi La *somma* di due vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è il vettore libero, denotato con

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \tag{1.1}$$

definito come segue; sia $\vec{PQ}$ un vettore applicato che rappresenta $\mathbf{v}$; sia ora T l'unico punto tale che il vettore applicato $\vec{QT}$ rappresenta $\mathbf{w}$, come nella proposizione 1.1.9: allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è per definizione la classe di equipollenza di $\vec{PT}$.

Figura 1.4. La somma di vettori

Nella figura 1.4, a sinistra, è raffigurata la somma di vettori. Osservando la figura a destra, possiamo riformulare la somma di vettori: due vettori non nulli e non paralleli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono rappresentati con segmenti orientati aventi la stessa origine P': tali segmenti individuano un parallelogramma e la somma dei vettori è rappresentata dalla diagonale uscente da P', con origine P'.

Prima di tutto, dobbiamo controllare che la somma sia ben definita, cioè il vettore somma non dipenda dalla scelta dei rappresentanti. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (risp., $\mathbf{w} = \mathbf{0}$) la somma di vettori liberi è ben definita e coincide con $\mathbf{w}$ (risp., $\mathbf{v}$). Possiamo quindi assumere che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano entrambi non nulli. La dimostrazione viene illustrata in Figura 1.5. Sia $\vec{P'Q'}$ un vettore applicato che rappresenta $\mathbf{v}$ e T' il punto tale che il vettore applicato $\vec{Q'T'}$ rappresenta $\mathbf{w}$: bisogna dimostrare che i vettori $\vec{PT}$ e $\vec{P'T'}$ sono equipollenti. Per definizione di equipollenza, i segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ sono congruenti e giacciono su rette parallele. Analogamente accade per QT e $Q'T'$. La tesi segue dai teoremi di congruenza per i triangoli.

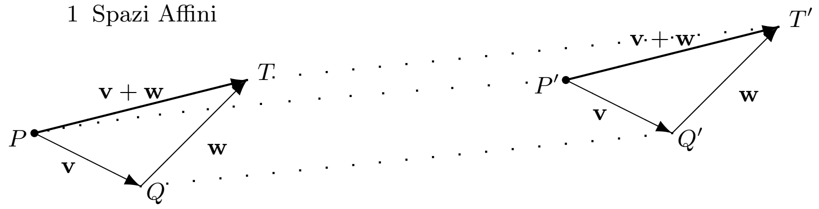

Figura 1.5. La somma di vettori è ben definita

La somma di vettori gode di alcune proprietà:

(SV1) *proprietà associativa*: $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{u}=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{u})\ \ \forall\,\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}\in\mathcal{V}$;
(SV2) *proprietà commutativa:* $\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}, \quad \forall\,\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{V}$;
(SV3) *il vettore* $\mathbf{0}$ *è l'elemento neutro per la somma:* $\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}, \quad \forall\mathbf{v}\in\mathcal{V}$;
(SV4) *esistenza dell'opposto*: per ogni $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$, posto $\mathbf{v}=\mathbf{PQ}$, il vettore $-\mathbf{v}$ definito da

$$-\mathbf{v}=\mathbf{QP} \tag{1.2}$$

verifica l'uguaglianza: $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$ (Figura 1.6).

Riassumiamo l'elenco delle proprietà della somma dicendo che l'insieme $\mathcal{V}$, dotato dell'operazione di somma di vettori, è un gruppo commutativo.

La somma $\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$ viene indicata con $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ ed è raffigurata nella Figura 1.7. Le proprietà della somma sono illustrate nella figure 1.8 e 1.9, che ne suggeriscono la dimostrazione.

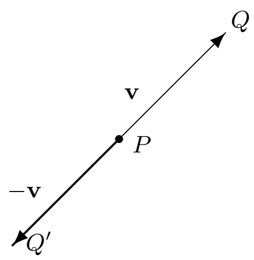

Figura 1.6. Opposto di un vettore: per costruzione $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{PQ'}$ sono equipollenti.

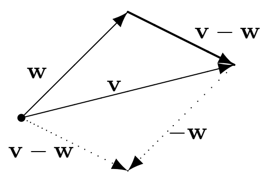

Figura 1.7. Differenza tra vettori

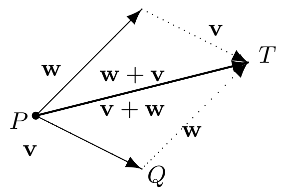

Figura 1.8. Proprietà commutativa della somma di vettori

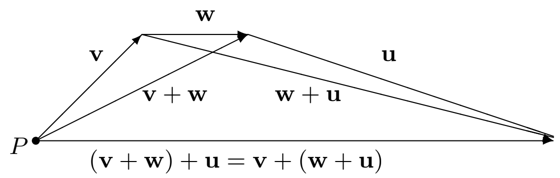

Figura 1.9. Proprietà associativa della somma di vettori

Definizione 1.2.2. Prodotto di un vettore libero per uno scalare reale Siano $\mathbf{v}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $a = 0$, poniamo $a\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se invece $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $a \neq 0$, il vettore libero $a\,\mathbf{v}$ è per definizione il vettore che ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$, lunghezza uguale al prodotto di a per la lunghezza di $\mathbf{v}$, e verso discorde o concorde con $\mathbf{v}$ a seconda che a sia negativo o positivo.

In dettaglio, sia $\overrightarrow{PQ}$ un vettore applicato che rappresenta il vettore non nullo $\mathbf{v}$ e sia r_{PQ} la retta per P e Q. Sulla semiretta di origine P e contenente Q, si costruisca l'unico punto T tale che il rapporto tra le lunghezze dei segmenti PQ e PT (in una qualsiasi unità di misura) sia il valore assoluto $|a|$ di a, e i vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PT}$ siano concordi (risp. discordi) se a è positivo (risp., negativo).

Il vettore libero rappresentato da $\overrightarrow{PT}$ è, per definizione, il vettore $a\,\mathbf{v}$.

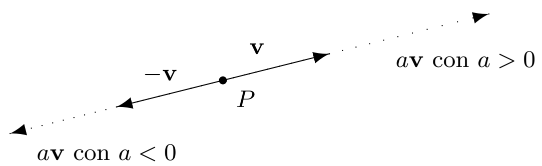

Figura 1.10. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Il prodotto di un vettore libero per un numero reale è ben definito perché il rapporto tra le lunghezze non dipende dall'unità di misura di lunghezza utilizzata.

Le proprietà del prodotto di un vettore per uno scalare seguono rapidamente dalla definizione e dalle proprietà dei triangoli:

(SV5) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$;
(SV6) $(a\,b)\mathbf{v} = a\,(b\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$;
(SV7) $(a + b)\mathbf{v} = a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$: *proprietà distributiva della somma di scalari rispetto al prodotto per un vettore*;
(SV8) $a\,(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a\,\mathbf{v}+a\,\mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V},\ \forall a \in \mathbb{R}$: *proprietà distributiva della somma di vettori rispetto al prodotto per uno scalare.*

La Figura 1.11 suggerisce una dimostrazione della proprietà (SV8).

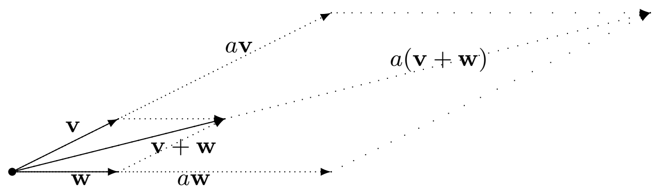

Figura 1.11. Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori

Grazie alle proprietà [(SV1)] - [(SV8)], risulta dimostrata la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.3. *L'insieme $\mathcal{V}$, dotato delle operazioni di somma di vettori e moltiplicazione di un vettore per uno scalare, è uno spazio vettoriale con elemento neutro* $\mathbf{0}$.

Le definizioni poste non richiedono che sia stata fissata una unità di misura di lunghezza.

Con la terminologia introdotta, possiamo formalizzare la definizione di retta orientata:

Definizione 1.2.4. Una *retta orientata* è il dato di una retta r e di un vettore non nullo $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$ con P e Q in r. Si dice che il vettore $\mathbf{v}$ è parallelo e concorde alla retta r.

L'insieme $\mathbb{E}$ dei punti dello spazio della geometria euclidea e lo spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}^3$ dei vettori geometrici dello spazio sono legati tra loro:

Definizione 1.2.5. Lo *spazio affine della geometria euclidea* è la coppia $(\mathbb{E}, f)$, ove

$$\begin{aligned} f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} &\to \mathcal{V} \\ (P, Q) &\mapsto \mathbf{PQ}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Valgono due importanti proprietà:

Proposizione 1.2.6. *(a) Dati un vettore geometrico* $\mathbf{v}$ *e un punto* P *dello spazio* $\mathbb{E}$*, esiste un unico punto* $Q \in \mathbb{E}$ *tale che* $\mathbf{v} = \mathbf{PQ}$*.*
(b) Per ogni terna (P, Q, S) *di punti di* $\mathbb{E}$*, si ha che*

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QS} = \mathbf{PS} \tag{1.4}$$

Dimostrazione. (a) È la proposizione 1.1.9.
(b) Segue dalla definizione di somma nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$. □

Le due proprietà elencate nella proposizione precedente forniranno il modello per la struttura più generale di spazio affine, che verrà introdotta nella sezione seguente.

1.3 La nozione di spazio affine

Siamo pronti per introdurre l'ambiente che studieremo nel resto del libro.

Consideriamo un insieme $\mathbb{A}$ non vuoto, i cui elementi sono chiamati *punti*, e uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ su un campo $\mathbb{K}$. Guidati dall'esempio dello spazio affine della geometria euclidea e dalla Proposizione 1.2.6, poniamo la seguente:

Definizione 1.3.1. Una applicazione:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} &\to \mathbf{V} \\ (P, Q) &\mapsto f(P, Q) \end{aligned} \tag{1.5}$$

definisce una *struttura di spazio affine* sull'insieme $\mathbb{A}$ se sono verificate le seguenti proprietà:

(AF1) per ogni punto P di $\mathbb{A}$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ esiste un unico punto Q di $\mathbb{A}$ tale che $f(P, Q) = \mathbf{v}$;
(AF2) per ogni terna (P, Q, S) di punti di $\mathbb{A}$ si ha:

$$f(P, Q) + f(Q, S) = f(P, S). \tag{1.6}$$

Definizione 1.3.2. Uno *spazio affine sul campo* $\mathbb{K}$ è una coppia

$$(\mathbb{A}, f),$$

ove $\mathbb{A}$ è un insieme, $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbf{V}$ definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{A}$, come nella definizione 1.3.1. Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$ viene chiamato *lo spazio vettoriale dei vettori liberi* di $\mathbb{A}$ e indicato col simbolo

$$\mathbf{V}(\mathbb{A}).$$

Per semplicità, diremo talvolta che $\mathbb{A}$ è uno spazio affine, lasciando sottintesa l'applicazione f.
Notazione Sia $(\mathbb{A}, f)$ uno spazio affine. Per analogia con l'esempio dello spazio affine geometrico, il vettore $f(P, Q)$ viene denotato col simbolo

$$\mathbf{PQ} \text{ (o } \mathbf{Q} - \mathbf{P}).$$

Altri testi utilizzano anche il simbolo $\overline{PQ}$ oppure il simbolo $\{PQ\}$.

Con le nuove notazioni, le proprietà che caratterizzano le strutture di spazio affine si riscrivono come:

(AF1) per ogni punto P di $\mathbb{A}$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ esiste un unico punto Q di $\mathbb{A}$ tale che $\mathbf{PQ} = \mathbf{Q} - \mathbf{P} = \mathbf{v}$;
(AF2) per ogni terna (P, Q, S) di punti di $\mathbb{A}$ si ha:

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QS} = \mathbf{PS} \tag{1.7}$$

ossia

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) + (\mathbf{S} - \mathbf{Q}) = \mathbf{S} - \mathbf{P}. \tag{1.8}$$

Definizione 1.3.3. Se $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ ha dimensione finita, la sua dimensione si dice *dimensione dello spazio affine* $\mathbb{A}$ sul campo $\mathbb{K}$ e si denota col simbolo

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{A},$$

ovvero più semplicemente col simbolo $\dim \mathbb{A}$ se si sottointende il campo $\mathbb{K}$ su cui $\mathbb{A}$ è spazio affine. Gli spazi affini di dimensione 1 (risp. 2) si dicono *rette* (risp. *piani*) *affini*.

Ogni spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ è anche uno spazio affine su un qualunque sottocampo $\mathbb{K}'$ di $\mathbb{K}$ in quanto $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ è pure un $\mathbb{K}'$-spazio vettoriale.

Esempio 1.3.4. **Lo spazio affine della geometria euclidea** Lo spazio affine della geometria euclidea $(\mathbb{E}, f)$ della Definizione 1.2.5 è uno spazio affine reale di dimensione 3. Analogamente, i punti di un piano (risp. di una retta) formano uno spazio affine di dimensione 2 (risp. 1) su $\mathbb{R}$.

Esempio 1.3.5. **Lo spazio affine canonicamente associato ad uno spazio vettoriale** Sia $\mathbf{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. L'applicazione:

$$\begin{aligned} f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{w} - \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1.9}$$

determina una struttura di spazio affine su $\mathbf{V}$, come si verifica facilmente. Nel seguito, ogni spazio vettoriale su un campo verrà munito di tale struttura di spazio affine sullo stesso campo.

Esempio 1.3.6. **Lo spazio affine numerico su un campo** Un caso particolare dell'esempio precedente è lo spazio affine sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Tale spazio affine si dice *spazio affine numerico di dimensione n sul campo* $\mathbb{K}$ e si denota col simbolo $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ o semplicemente col simbolo $\mathbb{A}^n$ se non vi è equivoco nella considerazione del campo $\mathbb{K}$. Gli elementi di $\mathbb{A}^n$, che si dicono *vettori numerici di dimensione n su* $\mathbb{K}$, verranno pensati come vettori riga ovvero come vettori colonna.
Il corollario 3.2.6 illustrerà in qual senso *gli spazi affini numerici forniscono un modello per tutti gli spazi affini.*

Esempio 1.3.7. **Strutture indotte** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo, sia B un insieme e sia $g : B \to A$ una biezione. L'applicazione:

$$\begin{aligned} f_B : B \times B &\to \mathbf{V}(\mathbb{A}) \\ (P, Q) &\mapsto \mathbf{g(P)g(Q)} = \mathbf{g(Q)} - \mathbf{g(P)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

determina, come subito si verifica, una struttura di spazio affine su B, con $\mathbf{V}(B) = \mathbf{V}(\mathbb{A})$. Tale struttura si dice *indotta* su B dalla applicazione f. Si noti che differenti biezioni inducono differenti strutture di spazio affine su B.

1.4 Proprietà elementari degli spazi affini

Studiamo le prime proprietà degli spazi affini:

Proposizione 1.4.1. *Sia* $(\mathbb{A}, f)$ *uno spazio affine sul campo* $\mathbb{K}$. *Si ha:*

(a) per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ *si ha* $\mathbf{PP} = \mathbf{0}$ *ossia* $\mathbf{P} - \mathbf{P} = \mathbf{0}$*;*
(b) per ogni coppia (P, Q) *di punti di* $\mathbb{A}$ *si ha* $\mathbf{PQ} = -\mathbf{QP}$ *ossia* $\mathbf{Q} - \mathbf{P} = -(\mathbf{P} - \mathbf{Q})$.

Dimostrazione. La (a) segue dalla relazione (AF2) ponendo $P = Q = R$. La (b) segue dalla stessa relazione ponendo $P = R$. ☐

In virtù della (AF1), possiamo definire una applicazione:

$$g : \mathbb{A} \times \mathbf{V} \to \mathbb{A}$$

nel modo seguente: data una coppia $(P, \mathbf{v}) \in \mathbb{A} \times \mathbf{V}$, l'immagine $g(P, \mathbf{v})$ è l'unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $\mathbf{Q} - \mathbf{P} = \mathbf{v}$. In seguito scriveremo

$$P + \mathbf{v} \tag{1.11}$$

per denotare il punto $g(P, \mathbf{v})$ di $\mathbb{A}$ e $P - \mathbf{v}$ per denotare il punto $P + (-\mathbf{v})$.
La seguente proposizione motiva la notazione introdotta in (1.11):

Proposizione 1.4.2. *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) per ogni $P \in \mathbb{A}$ *si ha* $P + \mathbf{0} = P$*;*

(b) per ogni $P \in \mathbb{A}$ *e per ogni coppia* $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *di vettori di* V *si ha*

$$P + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (P + \mathbf{v}) + \mathbf{w};$$

tale punto si denota con $P + \mathbf{v} + \mathbf{w}$*;*

(c) se P, Q, T *ed* S *sono punti di* $\mathbb{A}$ *e* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono vettori di* V *tali che* $P = Q+\mathbf{v}$ *e* $T = S + \mathbf{w}$*, allora* $\mathbf{P} - \mathbf{T} = \mathbf{Q} - \mathbf{S} + (\mathbf{v} - \mathbf{w})$*;*

(d) se P, Q, T *ed* S *sono punti di* $\mathbb{A}$ *tali che* $\mathbf{PQ} = \mathbf{TS}$ *allora si ha* $\mathbf{QS} = \mathbf{PT}$*.*

Dimostrazione. L'asserzione (a) segue dalla (a) della proposizione 1.4.1. Proviamo la (b). Posti $Q = P+\mathbf{v}$ e $T = (P+\mathbf{v})+\mathbf{w} = Q+\mathbf{w}$, la tesi equivale a mostrare che $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{T} - \mathbf{P}$; poiché d'altra parte $\mathbf{v}+\mathbf{w} = (\mathbf{Q} - \mathbf{P})+(\mathbf{T} - \mathbf{Q})$, si ottiene subito la tesi applicando la proprietà (AF2).

Proviamo la (c). Si ha:

$$\begin{aligned}
T + (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) &= (S + \mathbf{w}) + [(\mathbf{Q} - \mathbf{S}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})] = \\
&= (S + \mathbf{w}) + [(\mathbf{v} - \mathbf{w}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{S})] = \\
&= [(S + \mathbf{w}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w})] + (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) = \\
&= [(S + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w} + \mathbf{v})] + (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) = \\
&= [((S + \mathbf{w}) - \mathbf{w}) + \mathbf{v}] + (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) = \\
&= [S + \mathbf{v}] + (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) = \\
&= S + [\mathbf{v} + (\mathbf{Q} - \mathbf{S})] = \\
&= S + [(\mathbf{Q} - \mathbf{S}) + \mathbf{v}] = \\
&= [S + (\mathbf{Q} - \mathbf{S})] + \mathbf{v} = \\
&= Q + \mathbf{v} = \\
&= P
\end{aligned}$$

e dunque:

$$\mathbf{P} - \mathbf{T} = (\mathbf{Q} - \mathbf{S}) + \mathbf{v}.$$

Proviamo la (d). Si ha:

$$\mathbf{QS} = \mathbf{QP} + \mathbf{PS} = \mathbf{ST} + \mathbf{PS} = \mathbf{PS} + \mathbf{ST} = \mathbf{PT}.$$

□

Notiamo esplicitamente che la (d) della proposizione precedente si riduce, nel caso dello spazio affine della geometria euclidea, alla regola del parallelogramma.

Fissiamo ora un punto qualunque O di $\mathbb{A}$ e consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned}
g_O : \mathbf{V}(\mathbb{A}) &\to \mathbb{A} \\
\mathbf{v} &\mapsto O + \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Dalla proprietà (AF1) segue che g_O è una biezione, che induce su $\mathbb{A}$ una struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale isomorfo a $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. Si noti che la struttura indotta su $\mathbb{A}$ dipende da O, ed è diversa per scelte diverse di O perché il suo vettore nullo è O.

Definizione 1.4.3. L'insieme $\mathbb{A}$, con la struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale definita in (1.12), è detto lo *spazio vettoriale dei vettori di* $\mathbb{A}$ *applicati in* O, indicato con il simbolo $\mathbb{A}_O$.

Si osservi che, se $\dim \mathbb{A} = 0$, allora $\mathbb{A}$ consiste di un solo punto. Infatti, scelto un punto O si ha che $\dim \mathbb{A}_O = 0$ e quindi $\mathbb{A}_O = \mathbb{A}$ consiste di un solo punto.

1.5 Riferimenti

Ogni punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ dello spazio affine numerico $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ è un vettore di $\mathbb{K}^n$ ed è quindi caratterizzato dalle sue componenti $x_1, \ldots, x_n$. Ciò permette di definire sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ dati dai punti le cui componenti soddisfano equazioni assegnate. Cerchiamo una proprietà analoga anche per spazi affini più generali.

Consideriamo uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione (finita) n. Per i risultati del paragrafo precedente, ogni scelta di un punto $O \in \mathbb{A}$ definisce una biezione $g_O : \mathbf{V}(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$, $\mathbf{v} \mapsto O + \mathbf{v}$, come in (1.12). D'altra parte, la scelta di un riferimento (cioè una base ordinata) $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ fornisce una corrispondenza biunivoca di $\mathbb{K}^n$ con $\mathbf{V}(\mathbb{A})$, tramite la posizione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_n\mathbf{v_n}$ (che è più di una corrispodenza biunivoca, è un isomorfismo di spazi vettoriali).
Componendo le due biezioni, otteniamo una biezione

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \qquad \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{A} \\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & O + (x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_n\mathbf{v_n}). \end{array} \tag{1.13}$$

che dipende dalla scelta del punto $O \in \mathbb{A}$ e del riferimento $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$.

Definizione 1.5.1. Una coppia $\mathcal{R} = (O, R)$, ove $O \in \mathbb{A}$ e R è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$, si dice un *riferimento (cartesiano) affine* di $\mathbb{A}$. Il punto O prende il nome di *origine* del riferimento $\mathcal{R}$, mentre il riferimento R di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ si dice *associato* al riferimento $\mathcal{R}$.

Per quanto osservato, il dato di un riferimento affine individua univocamente una applicazione φ come in (1.13).

Definizione 1.5.2. Fissato un riferimento affine $\mathcal{R} = (O, R)$, si consideri l'applicazione φ come in (1.13). Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$ la n-pla

$$\varphi^{-1}(P) = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n,$$

caratterizzata dalla relazione

$$\mathbf{OP} = x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_n\mathbf{v_n}, \tag{1.14}$$

si dice la *n-pla delle coordinate (cartesiane)* di P nel riferimento $\mathcal{R}$. Ciò si esprime scrivendo

$$P(\mathbf{x}) \text{ o } P(x_1, \ldots, x_n).$$

L'origine O del riferimento $\mathcal{R}$ ha coordinate tutte nulle in $\mathcal{R}$. I punti $P_i(\mathbf{e}_i)$, dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-simo vettore unitario di $\mathbb{K}^n$, si dicono i *punti unitari* del riferimento.

Definizione 1.5.3. Per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$ la n-pla delle sue componenti in R si dice *n-pla delle componenti di* $\mathbf{v}$ *nel riferimento* $\mathcal{R} = (O, R)$.

Osservazione 1.5.4. Se P e Q sono punti di $\mathbb{A}$ aventi in $\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, allora il vettore $\mathbf{QP} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$ ha in $\mathcal{R}$ componenti $\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

Esempio 1.5.5. L'introduzione di un riferimento cartesiano nello spazio (risp., nel piano, nella retta) della geometria euclidea coincide con l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane come illustrato in [1], esempio (8.14).

Esempio 1.5.6. In $\mathbb{A}^n$ il riferimento $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n))$ si dice *riferimento naturale*. Un punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ha, in tale riferimento, proprio il vettore $\mathbf{x}$ come n-pla delle coordinate.

Esempio 1.5.7. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$. Sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{V}$ e sia $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ un riferimento di $\mathbf{V}$ quale spazio vettoriale. Allora $\mathcal{R} = (\mathbf{v}, R)$ è un riferimento di $\mathbf{V}$ quale spazio affine su $\mathbb{K}$. Sia $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$. Se $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{V}$ tale che $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n$, si ha:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (y_1 - x_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (y_n - x_n)\mathbf{v}_n \tag{1.15}$$

e quindi la n-pla delle coordinate cartesiane di $\mathbf{w}$ in $\mathcal{R}$ è $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Esempio 1.5.8. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{R} = (O, R)$ un riferimento di A, ove $R = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{A})$. Sia P un punto di $\mathbb{A}$ e sia $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ il vettore delle componenti di $\mathbf{OP}$. Se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \in \mathbf{V}(\mathbb{A})$ ha componenti $\mathbf{x}$ in $\mathcal{R}$, le coordinate di $Q = P + \mathbf{v}$ sono $\mathbf{p} + \mathbf{x} = (p_1 + x_1, \ldots, p_n + x_n)$.

Esempio 1.5.9. **Coordinate del punto medio** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$. Fissati due punti P e $Q \in \mathbb{A}$, un punto M tale $\mathbf{P} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{Q}$ viene detto il *punto medio* del segmento PQ; i punti P e Q si dicono *simmetrici* rispetto a M.

Assegnato un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{A}$, se P e Q hanno in $\mathcal{R}$ coordinate $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ rispettivamente, allora le coordinate $\mathbf{m}$ di M in $\mathcal{R}$ sono date da:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Esempio 1.5.10. **Cambio di riferimento** In uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione finita n, siano fissati due riferimenti $\mathcal{R} = (O, R))$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$. Un punto P di $\mathbb{A}$ ha coordinate $\mathbf{x}$ in $\mathcal{R}$ e $\mathbf{x}'$ in $\mathcal{R}'$, e si pone il problema di determinare la relazione tra i due vettori di coordinate. Questo problema verrà trattato con maggiore precisione nel Capitolo 3, sia completando gli aspetti teorici che corredando con esercizi svolti. Per ora, ci limitiamo ad alcuni esempi più semplici.

Se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R)$, cioè se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ differiscono solo per l'origine, le formule del cambiamento del riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{c}$, dove $\mathbf{c}$ è il vettore delle coordinate in $\mathcal{R}$ di O'. Nota che la relazione tra le coordinate nei due riferimenti non dipende dal punto. Guarda l'Esercizio svolto 1.8 per un esempio.

Se invece $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O, R')$ hanno la stessa origine, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è la matrice della cambiamento di riferimento nel passaggio da R a R'. Limiteremo, per ora, gli esercizi ad esempi che possono essere trattati con semplicità anche senza conoscere il prodotto tra matrici.

Esercizi svolti

SPAZIO AFFINE EUCLIDEO

Problema 1.1. *Nello spazio euclideo, siano P, Q, P', Q' quattro punti non allineati. Prova che i due vettori applicati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$ sono equipollenti se e solo se il punto medio del segmento $\overline{QP'}$ coincide con il punto medio di $\overline{PQ'}$.*

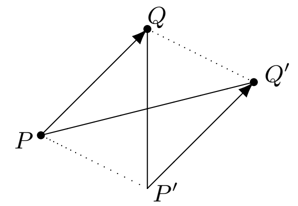

Figura 1.12. Equipollenza di vettori

Soluzione. Basta mostrare la tesi assumendo che i vettori applicati siano entrambi non nulli. I punti medi coincidono se e solo se P, Q, P', Q' sono, nell'ordine, vertici di un parallelogramma. Ma a sua volta, questa è la condizione di equipollenza tra $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{P'Q'}$.

Problema 1.2. *Se M è il punto medio di del segmento $\overline{PQ}$ in $\mathbb{E}$, allora:*

$$\mathbf{Q} - \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{P}$$

Soluzione. Assumendo che $P \neq Q$, i vettori applicati $\overrightarrow{MQ}$ e $\overrightarrow{PM}$ hanno la stessa direzione e la stessa lunghezza, ma sono discordi.

Problema 1.3. *a) Mostra che, se A, B, C, D, sono quattro punti distinti del piano allora*

$$\mathbf{AD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD}.$$

b) Mostra che, se A, B, C, D, E sono arbitrari punti del piano, allora

$$\mathbf{AE} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} + \mathbf{DE}.$$

(Si veda la Figura 1.13 per una rappresentazione grafica)
c) In generale, assegnati $n > 1$ vettori geometrici $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, la loro somma può essere calcolata fissando punti $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ nel piano, con la condizione che $\mathbf{v}_i = \mathbf{A_i A_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dimostra che:

$$\mathbf{A_0 A_n} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n.$$

L'unione dei segmenti orientati $\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ è detta poligonale dei vettori *$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, e la somma dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ coincide con il lato di chiusura della poligonale, orientato con origine A_0. In particolare, la poligonale risulta chiusa se e solo se $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.*

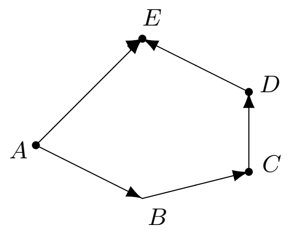

Figura 1.13.

Soluzione. a) La tesi segue applicando la definizione 1.2.1 di somma di vettori e la proprietà associativa: per definizione, si ha infatti che $\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$ e $\mathbf{AD} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.

b) Per quanto osservato in a), si ha che $\mathbf{AD} = \mathbf{AB}+\mathbf{BC}+\mathbf{CD}$. Ora basta osservare che $\mathbf{AE} = \mathbf{AD} + \mathbf{DE}$ per definizione.

c) Procediamo per induzione su n: per $n = 2$ la tesi è vera per definizione. Per ipotesi induttiva, sappiamo che la tesi è vera per $n-1$, e dunque $\mathbf{A_0A_{n-1}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_{n-1}$. Ma $\mathbf{A_0A_n} = \mathbf{A_0A_{n-1}} + \mathbf{A_{n-1}A_n}$ per definizione di somma, e abbiamo la tesi.

SPAZI AFFINI

Problema 1.4. Segmenti orientati e vettori applicati in uno spazio affine *Sia $(\mathbb{A}, f)$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$. Dati i punti P e Q di $\mathbb{A}$, si dice* segmento *PQ di estremi P e Q la coppia non ordinata di elementi di $\mathbb{A}$ formata da P e Q. Si dice invece* segmento orientato *(PQ) di estremi P e Q la coppia ordinata $(P, Q) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$. Il segmento orientato (PQ) si dice pure* vettore applicato *in P di secondo estremo Q. Se $P = Q$, tale vettore applicato si dice* nullo. *Sia $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ l'insieme $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ dei vettori applicati di $\mathbb{A}$. In $\mathcal{V}(\mathbb{A})$ definiamo la seguente relazione $\mathcal{R}$ detta di* equipollenza*:*

$$(PQ)\mathcal{R}(P'Q') \Leftrightarrow \mathbf{PQ} = \mathbf{P'Q'}. \tag{1.16}$$

(i) Prova che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.
(ii) Prova inoltre che l'insieme quoziente $\mathcal{V}(\mathbb{A})/\mathcal{R}$ può essere identificato con $V(\mathbb{A})$ in modo tale che l'applicazione quoziente coincida con l'applicazione $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V(\mathbb{A})$ che determina la struttura di spazio affine su $\mathbb{A}$.

Soluzione. (i) Mostriamo che la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza. Essa è una relazione riflessiva perché $(PQ)\mathcal{R}(PQ)$, essendo $\mathbf{PQ} = \mathbf{PQ}$. È simmetrica perché

$$(PQ)\mathcal{R}(P'Q') \Leftrightarrow \mathbf{PQ} = \mathbf{P'Q'} \Leftrightarrow (P'Q')\mathcal{R}(PQ)$$

ed è transitiva per la proprietà transitiva delle uguaglianze, perchè se $(PQ)\mathcal{R}(P'Q')$ e $(P'Q')\mathcal{R}(P''Q'')$, allora $\mathbf{PQ} = \mathbf{P'Q'}$ e $\mathbf{P'Q'} = \mathbf{P''Q''}$.

(ii) Per definire l'identificazione richiesta tra $\mathcal{V}(\mathbb{A})/\mathcal{R}$ e $V(\mathbb{A})$, basta osservare che l'applicazione $f : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V(\mathbb{A})$ che definisce la struttura di spazio affine su $\mathbb{A}$ fattorizza attraverso la proiezione $\pi : \mathbb{A}\times\mathbb{A} \to \mathcal{V}(\mathbb{A})/\mathcal{R}$: infatti, la definizione (1.16) assicura che

$$\pi(P,Q) = \pi(P',Q') \Leftrightarrow f(P,Q) = f(P',Q').$$

Per il primo teorema di omomorfismo per gli insiemi, esiste una unica applicazione g, che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\times\mathbb{A} & \xrightarrow{f} & V(\mathbb{A}) \\ \pi\downarrow & \nearrow g & \\ \mathcal{V}(\mathbb{A})/\mathcal{R} & & \end{array} \quad ;$$

Inoltre, l'applicazione g risulta essere una biezione e soddisfa le richieste.

Problema 1.5. Relazione di Grassmann *Siano $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ punti di uno spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo $\mathbb{K}$. Prova che:*

$$\mathbf{A_1A_2} + \mathbf{A_2A_3} + \ldots + \mathbf{A_{n-1}A_n} + \mathbf{A_nA_1} = \mathbf{0}.$$

Soluzione. Per la proposizione 1.4.1, b), si ha che $\mathbf{A_nA_1} = -\mathbf{A_1A_n}$: l'asserto è dunque vero per $n = 2$, mentre per $n \geq 3$ la tesi equivale a mostrare che $\mathbf{A_1A_2}+\mathbf{A_2A_3}+\ldots+\mathbf{A_{n-1}A_n} = \mathbf{A_1A_n}$. Si può ora procedere per induzione, visto che per $n = 3$ la tesi è vera per la proprietà (AF2) degli spazi affini. Supponendo per ipotesi induttiva che $\mathbf{A_1A_2}+\mathbf{A_2A_3}+\ldots+\mathbf{A_{n-2}A_{n-1}} = \mathbf{A_1A_{n-1}}$, basta mostrare che $\mathbf{A_1A_{n-1}} + \mathbf{A_{n-1}A_n} = \mathbf{A_1A_n}$; tale uguaglianza è vera applicando nuovamente la proprietà (AF2).

Problema 1.6. Il baricentro di una n-pla di punti

(i) *Siano $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$ punti di uno spazio affine $\mathbb{A}$ su un campo $\mathbb{K}$ e siano $a_1, \ldots, a_n$ elementi di $\mathbb{K}$ tali che $a_1+\ldots+a_n \neq 0$. Prova che esiste uno e un solo punto X di A tale che*

$$a_1(\mathbf{XA_1}) + a_2(\mathbf{XA_2}) + \ldots + a_n(\mathbf{XA_n}) = \mathbf{0}. \tag{1.17}$$

Più precisamente, se O è un qualunque punto dello spazio, verifica che il punto richiesto è l'unico punto X tale che

$$\mathbf{X} - \mathbf{O} = \frac{[a_1(\mathbf{A_1} - \mathbf{O}) + a_2(\mathbf{A_2} - \mathbf{O}) + \ldots + a_n(\mathbf{A_n} - \mathbf{O})]}{(a_1 + \ldots + a_n)}. \tag{1.18}$$

Il punto X si dice baricentro *della n-pla di punti $(A_1, \ldots, A_n)$* con il sistema di pesi $(a_1, \ldots, a_n)$. *Se $a_1 = \ldots = a_n = 1$, X si dice* baricentro geometrico *(o semplicemente* baricentro*) della n-pla di punti $(A_1, \ldots, A_n)$.*

(ii) *Prova che se $n = 2$, il baricentro geometrico X della coppia (A_1A_2) è il punto medio del segmento A_1A_2.*

(iii) Supponi ora che $\mathbb{A}$ abbia dimensione finita e siano fissati $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathbb{K}$ tali che $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$. Prova che, se in un dato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}$ i punti $A_1, \ldots, A_n$ hanno rispettivamente vettori delle coordinate $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, allora il baricentro X della n-pla di punti $(A_1, \ldots, A_n)$ con il sistema di pesi $(a_1, \ldots, a_n)$ ha in $\mathcal{R}$ vettore $\mathbf{x}$ delle coordinate dato da

$$\mathbf{x} = (a_1\mathbf{a}_1 + \ldots + a_n\mathbf{a}_n)/(a_1 + \ldots + a_n)$$

In particolare il baricentro geometrico *della n-pla $(A_1, \ldots, A_n)$ ha vettore delle coordinate $\mathbf{x}$ dato da*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_n)/n.$$

Se $P(\mathbf{a})$ e $Q(\mathbf{b})$ sono punti di $\mathbb{A}$, il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ ha vettore delle coordinate $\mathbf{x}$ dato da

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2.$$

Soluzione. (i) Sia fissato un punto O e sia X il corrispondente punto definito in (1.18). Si hanno allora le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned}
a_1(\mathbf{A_1} - \mathbf{X}) + a_2(\mathbf{A_2} - \mathbf{X}) + \ldots + a_n(\mathbf{A_n} - \mathbf{X}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
a_1[(\mathbf{A_1} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{X})] + a_2[(\mathbf{A_2} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{X})] + \ldots \\
\ldots + a_n[(\mathbf{A_n} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{X})] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \\
a_1[(\mathbf{A_1} - \mathbf{O}) - (\mathbf{X} - \mathbf{O})] + a_2[(\mathbf{A_2} - \mathbf{O}) - (\mathbf{X} - \mathbf{O})] + \ldots \\
\ldots + a_n[(\mathbf{A_n} - \mathbf{O}) - (\mathbf{X} - \mathbf{O})] = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Sostituendo ora l'espressione di $\mathbf{X} - \mathbf{O}$ data da(1.18), ricaviamo che l'uguaglianza cercata equivale a:

$$\begin{aligned}
a_1 \left[\mathbf{OA_1} - \frac{a_1\mathbf{OA_1} + a_2\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\mathbf{OA_n}}{(a_1 + \ldots + a_n)}\right] + \\
a_2 \left[\mathbf{OA_2} - \frac{a_1\mathbf{OA_1} + a_2\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\mathbf{OA_n}}{(a_1 + \ldots + a_n)}\right] + \ldots \\
\ldots + a_n \left[\mathbf{OA_n} - \frac{a_1\mathbf{OA_1} + a_2\mathbf{OA_2} + \ldots + a_n\mathbf{OA_n}}{(a_1 + \ldots + a_n)}\right] = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Ora è sufficiente osservare che, svolgendo i conti, l'uguaglianza è vera perchè gli addendi si elidono tra loro.

(ii) Per quanto mostrato al punto precedente, sappiamo che, fissato un punto O, il baricentro geometrico della coppia A_1, A_2 è il punto X tale che $\mathbf{X} - \mathbf{O} = \frac{1}{2}[(\mathbf{A_1} - \mathbf{O}) + (\mathbf{A_2} - \mathbf{O})]$. Per controllare che X è il punto medio tra A_1 e A_2, occorre provare che $\mathbf{X} - \mathbf{A_1} = \mathbf{A_2} - \mathbf{X}$. Tale uguaglianza è vera se e solo se $\mathbf{OX} + \mathbf{A_1O} = \mathbf{OA_2} + \mathbf{XO}$, cioè $\frac{1}{2}[\mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2}] + \mathbf{A_1O} = \mathbf{OA_2} - \frac{1}{2}[\mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2}]$; svolgendo il calcolo, si verifica l'ultima uguaglianza.

(iii) Segue, ricordando l'espressione (1.18) del baricentro. Questo risultato coincide con quanto già trovato nell'esempio 1.5.9.

Problema 1.7. *Determina le coordinate del baricentro geometrico X dei punti $A(0,8)$, $B(2,0)$, $C(10,12)$ di $A^2_{\mathbb{R}}$.*

Soluzione. Applicando la formula 1.18 dell'Esercizio Svolto 1.6 e scegliendo l'origine $\mathbf{0}$ come punto O, si ricava $X(4, 20/3)$.

Una motivazione per l'Esercizio Svolto 1.6 è fornita dall'osservazione seguente.

Definizione 1.11. Fissata una unità di misura di lunghezza, sia $\mathbf{f}$ un vettore che indica una forza e sia s una retta orientata parallela ad $\mathbf{f}$. Si dice *intensità relativa* di $\mathbf{f}$ rispetto alla retta orientata s il numero pari alla lunghezza di $\mathbf{f}$, se $\mathbf{f}$ è concorde con il verso di s, o all'opposto della lunghezza di $\mathbf{f}$ altrimenti.

Osservazione 1.12. Siano $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sono due forze parallele ad una retta orientata s, applicate in due punti distinti F_1 e F_2, con intensità relative f_1, f_2 rispetto ad s. Se $f_1+f_2 \neq 0$, allora la risultante di $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ è parallela ad s, con intensità relativa f_1+f_2, e la sua retta di applicazione passa per il baricentro di (F_1, F_2) con sistema di pesi (f_1, f_2).

Analogamente, siano F_1, ..., F_n punti di una retta r e $\mathbf{f}_1$, ..., $\mathbf{f}_n$ forze tra loro parallele applicate in F_1, ..., F_n rispettivamente. Se f_1, ..., f_n sono le intensità relative delle forze (rispetto ad una retta orientata s parallela ad esse) e $f = f_1 + \ldots + f_n \neq 0$, allora *la risultante delle forze* $\mathbf{f}_1$, ..., $\mathbf{f}_n$ è parallela alla retta s, ha intensità relativa f rispetto alla retta orientata s e la sua retta di applicazione passa per il baricentro di $(F_1, \ldots, F_n)$ rispetto al sistema di pesi $(f_1, \ldots, f_n)$.

Esempio 1.13. Siano F_1, ..., F_n punti materiali di masse f_1, ..., f_n appartenenti ad una retta r. Se i punti sono contenuti in una regione sufficientemente ristretta dello spazio, si può pensare che le loro forze peso sono parallele e proporzionali alle masse. A tale situazione si applicano le osservazioni precedenti.

RIFERIMENTI

Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$, scegliamo un punto $O \in \mathbb{E}^2$ e una base ordinata $R = (\mathbf{i} = \mathbf{OA}_1, \mathbf{j} = \mathbf{OA}_2)$ dello spazio vettoriale dei vettori liberi $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$. In $\mathbb{E}^2$ fissiamo il riferimento affine $\mathcal{R} = \{O, (\mathbf{i}, \mathbf{j})\}$.

Problema 1.8. *Scegli un punto $O'(c_1, c_2)$ di $\mathbb{E}^2$ e considera il riferimento $\mathcal{R}' = \{O', (\mathbf{i}, \mathbf{j})\}$. Per ogni punto P, denota con (x_1, x_2) le coordinate in $\mathcal{R}$ e con (x'_1, x'_2) le coordinate in $\mathcal{R}'$. Per ogni punto P, determina la relazione tra le coordinate (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2).*

Soluzione. Per definizione di coordinate in $\mathcal{R}'$, sappiamo che $P = O' + x_1'\mathbf{i} + x_2'\mathbf{j}$. Sostituendo $O' = O + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$, ricaviamo che

$$P = O' + x_1'\mathbf{i} + x_2'\mathbf{j} = O + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + x_1'\mathbf{i} + x_2'\mathbf{j} = O + (c_1 + x_1')\mathbf{i} + (c_2 + x_2')\mathbf{j}.$$

Confrontando che l'uguaglianza $P = O + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$, per l'unicità delle coordinate in $\mathcal{R}$, concludiamo che $x_1 = c_1 + x_1', x_2 = c_2 + x_2'$.

Problema 1.9. *Controlla se $R' = (3\mathbf{i} - \mathbf{j}, 2\mathbf{i})$ e $R'' = \{2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\}$ sono basi di $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$.*

Soluzione. L'insieme R' è una base di $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$ se e solo se i vettori $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i}$ non sono proporzionali tra loro: ciò è vero perchè sono entrambi non nulli e $\mathbf{v}_1$ non è multiplo di $\mathbf{v}_2$ perché è non nulla la sua componente lungo $\mathbf{j}$. L'insieme R'' non è una base di $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$ perché $2\mathbf{i} + \mathbf{j} = 2\,(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j})$.

Problema 1.10. *Considera la base $R' = \{\mathbf{i}' = 5\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{j}' = 2\mathbf{j}\}$ di $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$.*
a) Determina le componenti di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ nella base R'.
b) Determina le componenti di $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ nella base R'.
c) Per ogni punto P, denota con (x_1, x_2) le coordinate in $\mathcal{R}$ e con (x_1', x_2') le coordinate in $\mathcal{R}' = (O, R')$. Per ogni punto P, determina la relazione tra le coordinate (x_1, x_2) e (x_1', x_2').

Soluzione. a) Poichè $\mathbf{j} = (1/2)\mathbf{j}'$, le componenti di $\mathbf{j}$ nella base R' sono $(0, 1/2)$. Analogamente, $\mathbf{i} = (1/5)\mathbf{i}' - (1/10)\mathbf{j}'$ ha componenti $(1/5, -1/10)$.
b) Sostituendo le componenti appena trovate, otteniamo che

$$x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} = x_1\left[\frac{1}{5}\mathbf{i}' - \frac{1}{10}\mathbf{j}'\right] + \frac{1}{2}x_2\,\mathbf{j}' = \frac{1}{5}x_1\mathbf{i}' + \left[-\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right]\mathbf{j}'.$$

Le componenti di $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ nella base R' sono dunque la coppia

$$(\frac{1}{5}x_1, -\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2).$$

c) Dal punto precedente, ricaviamo che $x_1' = \frac{1}{5}x_1, x_2' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

Problema 1.11. *Considera il punto $P(2, -1) \in \mathbb{E}^2$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}' = (Q, R)$, ove $Q(3, 1)$, $R' = (\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{v}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j})$.*

Soluzione. Le coordinate $(x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$ di P nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono, per definizione, caratterizzate dall'uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = Q + x_1'\,\mathbf{v}_1 + x_2'\,\mathbf{v}_2 = Q + (2x_1' + x_2')\mathbf{i} + (x_1' - x_2')\mathbf{j}$$

Per determinarle, possiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo ottenuto uguagliando componente per componente:

$$\begin{cases} 2 = 3 + 2x_1' + x_2' \\ -1 = 1 + x_1' - x_2' \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava che le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R}'$ sono $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$.

Esercizi

SPAZI AFFINI E RIFERIMENTI

1.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathbb{K}'$ un sottocampo proprio di $\mathbb{K}$. Prova che $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{A} < \dim_{\mathbb{K}'} \mathbb{A}$.

1.2. Determina le coordinate del punto medio di $A(2,-7)$ e $B(12,5)$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

1.3. Considera il punto $P(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q, R)$, ove $Q(-6,1)$, $R = (\mathbf{e}_1 = (1,0),\, \mathbf{e}_2 = (1,0))$.

1.4. Considera il punto $P(2,-1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Determina le coordinate di P nel riferimento $\mathcal{R} = (Q, R)$, ove $Q(1,5)$, $R = (\mathbf{v}_1 = (1,1),\, \mathbf{v}_2 = (1,-1))$.