UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA.
Corsi di Laurea in Ingegneria Energetica, Gestionale e Meccanica - Lettere P-Z

Esame di GEOMETRIA (Prof. F. Tovena) 2013

Esercizi su SISTEMI LINEARI.
**Argomenti**: Sistemi di equazioni lineari, matrici, matrici associate a sistemi di equazioni lineari, matrici ridotte per righe, metodo di riduzione (o eliminazione) di Gauss Jordan per una matrice, applicazione del metodo di riduzione alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

1) Determinare la matrice associata al seguente sistema di 3 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 7x_3 + \sqrt{5}x_4 = 0 \end{cases}$$

2) Determinare il sistema lineare omogeneo in 5 incognite associato alla matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 2\pi & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Elencare tutte le soluzioni dell'equazione lineare $3x - 5y = 2$ nelle incognite $x$ e $y$.

*Ricavo la $x$ in funzione della $y$, e scrivo entrambe in funzione di un parametro reale $t$. Trovo le seguenti equazioni parametriche per $r$:*

$$\begin{cases} x = \frac{2+5t}{3} \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

4) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo in 5 variabili:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

*Il sistema lineare assegnato è omogeneo, ed è dunque sicuramente compatibile. Mi limito a studiarne la matrice dei coefficienti:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*che è ridotta per righe ed ha rango 3 (pari al numero di righe non nulle). Le soluzioni del sistema sono parametrizzate dai valori assegnati alle variabili $x_4$ e $x_5$, che corrispondono alle colonne nelle quali non è stato scelto pivot:*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -x_5 \\ x_2 - x_3 = -2x_4 \\ x_3 = 2x_4 - x_5 \end{cases}$$

*Modifico $A$ in modo da ottenere una matrice completamente ridotta $A'$*

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

*e ricavo la descrizione parametrica delle soluzioni del sistema lineare:*

$$\{(\frac{-2t+3s}{3}, s, -2t+s, t, s)|t, s \in \mathbf{R}\}.$$

*5) Siano assegnati i seguenti* sistemi lineari in 4 variabili:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -20 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

a) Per ciascuno di tali sistemi, determinare matrice completa e incompleta associate.

*Per il primo sistema, la matrice dei coefficienti è*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \textit{ mentre la matrice completa è } C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*per il secondo sistema:*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -4 & 2 \end{pmatrix} \textit{ e la matrice completa è } C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & -20 \end{pmatrix},$$

*mentre per il terzo sistema:*

$$A_3 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -4 & 2 \end{pmatrix} \textit{ e la matrice completa è } C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Per ciascuno di tali sistemi, discutere se la matrice completa associata è ridotta. In caso contrario, determinare una matrice ridotta che ne sia una modificazione.

*Consideriamo il primo sistema; poichè la matrice $C_1$ non è ridotta (ad esempio, perché la prima riga è non nulla ma non ammette pivot) e modifichiamo la matrice completa in modo che diventi ridotta:*

$$C_1 \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & 4 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{13}{6} \end{pmatrix} = C_1'.$$

*La matrice $C_1'$ è ridotta ed è la modificazione cercata. Procedendo analogamente per il secondo sistema, si trova, ad esempio:*

$$C_2 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C_2'.$$

*Per il terzo sistema, si trova:*

$$C_3 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} = C_3'.$$

c) Per ciascuno di tali sistemi, determinare un sistema lineare ridotto ed equivalente e determinarne le soluzioni (se è compatibile).

*I sistemi richiesti si ricavano scrivendo i sistemi lineari associati alle matrici ridotte $C'_1$, $C'_2$ e $C'_3$ trovate al punto precedente. Per semplicità, qualora nella matrice compaiano denominatori, moltiplico l'intera riga per il denominatore stesso. Nell'ordine, i sistemi sono:*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 30x_3 + 15x_4 = 13 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 5_2 - 3x_3 + 2x_4 = -13 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 5_2 - 3x_3 + 2x_4 = -13 \\ 0 = 14 \end{cases}$$

*Il primo sistema è compatibile perchè il rango di matrice completa e incompleta coincidono. Procedo con le modificazioni sulle righe della matrice completa, in modo da ottenere una matrice completamente ridotta:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 15 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{28}{15} \\ 0 & 0 & 30 & 15 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 8 & \frac{58}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{28}{15} \\ 0 & 0 & 30 & 15 & 13 \end{pmatrix}.$$

*Le soluzioni del primo sistema sono quindi* $S_1 = \{(-\frac{8}{3}t + \frac{58}{45}, -2t + \frac{28}{15}, \frac{-15t+13}{30}t)|t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^4$ *e dipendono da un parametro reale.*

*In modo analogo, studio il secondo sistema, che è compatibile perché la forma ridotta della matrice completa e quella della matrice incompleta hanno lo stesso numero di righe non nulle. Una forma completamente ridotta della matrice dei coefficienti si ricava ad esempio nel modo seguente:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 5 & -3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

*e l'insieme delle soluzioni dipende da due parametri reali* $S_2 = \{(\frac{1}{5}t - \frac{4}{5}s + \frac{9}{5}, \frac{3}{5}t - \frac{2}{5}s - \frac{13}{5}, t, s)|t, s \in \mathbf{R}\}$.

*Il terzo sistema non è compatibile, perché l'equazione* $0 = 14$ *non ha soluzioni. Questa equazione si presenta perché le forme ridotte di matrice completa e incompleta non hanno lo stesso numero di righe.*

6) Determinare una matrice ridotta per righe che sia modificazione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Applico il metodo di Gauss-Jordan alla matrice $A$, avendo osservato che essa non è ridotta. Scelgo come pivot della prima riga l'elemento della seconda colonna e modifico la terza riga in modo da renderlo un pivot:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A'.$$

*La matrice $A'$ è ridotta per righe.*