Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di Geometria 2 - Secondo esonero (Prof. C.Ciliberto) 9 giugno 2008
Giustificare le risposte.

1) Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^3$ con un riferimento proiettivo fissato. Siano fissati la retta r di equazioni $x_1+x_2+x_4=0, x_1+3x_2+x_3=0$ e il piano α che che passa per i punti $P[1,2,-1,0]$, $Q[-1,0,-1,1]$, $R[0,0,1,3]$.

a) Determinare una equazione omogenea per α e discutere se il punto $T[0,1,-1,1]$ appartiene ad α.

b) Determinare equazioni parametriche per la retta r e determinare l'intersezione tra α e r.

c) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r^* di $\mathbf{P}^{3*}$ corrispondente a r.

2) Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^2$ con un sistema di coordinate omogenee $[x_1, x_2, x_3]$. Siano fissati i punti $P[1,0,0]$, $Q[0,1,0]$, $R[0,0,1]$ $S[1,1,1]$.

a) Determinare il birapporto (P,Q,M,T), ove $M[1,-2,0]$, $T[-1,5,0]$.

b) Determinare il cambio di coordinate dal sistema assegnato al sistema di coordinate omogenee $[x'_1, x'_2, x'_3]$ nel quale si abbia $P[2,0,0]$, $Q[3,1,0]$, $R[1,1,1]$, $S[0,3,1]$. Determinare inoltre le coordinate nel sistema assegnato del punto V che, nel nuovo sistema, assume le coordinate $[0,0,1]$.

3) Nello spazio vettoriale reale $V=\mathbf{R}^3$, si denoti con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ il riferimento canonico. Sia φ il prodotto scalare su V definito da

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 6x_1y_1 + 14x_3y_3 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 10x_3y_1 + 10x_1y_3 + 7x_2y_3 + 7x_3y_2$$

a) Determinare il radicale $V^\perp$ di φ ed un sottospazio U tale che $V = V^\perp \oplus U$ e φ induca su U un prodotto scalare non degenere.

b) Determinare l'ortogonale $W^\perp$, rispetto a φ, del sottospazio W di V generato da $\mathbf{e}_2$ e controllare se W e $W^\perp$ sono in somma diretta.

4) Nel piano reale con i punti immaginari, sia fissato un sistema di riferimento reale monometrico ortogonale. Si considerino fissate le coniche γ di equazione $3x^2-2y^2+5xy-3x+y=0$ e γ' di equazione $x^2+4y^2-4xy-x-2y-1=0$

a) Determinare le componenti di γ e i punti del piano proiettivo da aggiungere a γ per ottenerne il completamento proiettivo.

b) Discutere se γ' ha centro e, in caso positivo, determinarlo.

c) Determinare le tangenti a γ' passanti per $P(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$ e le tangenti a γ' passanti per $Q(0,0)$.

d) Siano A la matrice associata a γ' e A_{33} la matrice ottenuta da A cancellando la terza riga e la terza colonna. Determinare una matrice ortogonale O ed una matrice diagonale Δ tali che $O^t A_{33} O = \Delta$.