Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, -1, -1)$ ed $R = (3, 1, 1)$.

a) Trovare l'equazione cartesiana del piano α passante per i tre punti dati.

b) Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono P, Q, R.

c) Determinare le equazioni parametriche della retta r, luogo dei punti equidistanti dai tre punti P, Q, R.

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici simmetriche ($A = A^t$).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici diagonali (gli elementi fuori della diagonale principale sono 0). Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(1, 0, -1) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore 2 è $V_2 = \{(x, y, z)/2x - y + z = 0\}$.

a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.

b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.

c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ le rette r_1 e r_2 definite da

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} ; \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = 1 + s \\ z = 3 - s \end{cases}$$

a) Trovare un vettore w ortogonale ad entrambe le rette r_1 ed r_2 e verificare che tali rette sono sghembe.
b) Determinare una equazione cartesiana del piano per r_1 e parallelo a w.
c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta perpendicolare ed incidenti alle due rette date.

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici con traccia nulla (traccia = somma degli elementi della diagonale principale).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici diagonali (gli elementi fuori della diagonale principale sono 0). Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(-1,1,0) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore 3 è $V_3 = \{(x,y,z)/2x+y-z=0\}$.

a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.

b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.

c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 2)$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano α passante per i punti A, B, C.

b) Determinare la distanza del punto D dal piano α.

c) Determinare il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici triangolari inferiori (l'elemento sopra la diagonale principale è zero).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici antisimmetriche ($B = -B^t$). Determinare la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(0,1,-1) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore 5 è $V_5 = \{(x,y,z) / -x+y+2z=0\}$.
a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.
b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.
c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro punti $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 2)$.

a) Trovare una equazione del piano α che contiene i punti B, C, D.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto A e perpendicolare al piano α.

c) Determinare le coordinate del punto A' proiezione ortogonale di A sul piano α.

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici simmetriche ($B = B^t$).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici scalari (gli elementi sulla diagonale principale sono uguali e i restanti sono 0). Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(0,-1,1) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore -2 è $V_{-2} = \{(x,y,z)/ -x+2y+z=0\}$.
a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.
b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.
c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ le rette r_1 ed r_2 di equazioni, rispettivamente:

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-z=0 \end{cases} \quad ; \qquad r_2 : \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Verificare che le rette r_1 ed r_2 sono parallele.
b) Determinare l'equazione cartesiana del piano α che le contiene.
c) Determinare una equazione cartesiana per ciascuno dei piani a distanza $\sqrt{3}$ dal piano α trovato nel punto **b)** .

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici con traccia nulla (traccia = somma degli elementi della diagonale principale).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici scalari (gli elementi sulla diagonale principale sono uguali e i restanti sono 0). Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(0,-1,1) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore -3 è $V_{-3} = \{(x,y,z)/x+2y-z=0\}$.
a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.
b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.
c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esame di Geometria del 19 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ le rette l_1, l_2 e l_3 definite da

$$l_1 : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases} ; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 + s \\ z = s \end{cases} ; \qquad l_3 : \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 1 - r \\ z = 4r - 1 \end{cases}$$

a) Verificare che le rette l_1 ed l_2 sono sghembe.
b) Determinare una equazione cartesiana del piano per l_1 e parallelo alla retta l_3.
c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta parallela ad l_3 ed incidente ad l_1 ed l_2.

2. Nello spazio vettoriale V delle matrici a coefficienti reali di ordine 2 si consideri il sottospazio vettoriale U delle matrici triangolari superiori (l'elemento sotto la diagonale principale è zero).

a) Trovare una base di U e calcolare la dimensione.

b) Determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

c) Sia W il sottospazio vettoriale di V delle matrici antisimmetriche ($B = -B^t$). Determinare la dimensione di $U \cap W$.

d) Calcolare la dimensione di $U + W$ e dire se la somma è diretta (giustificare).

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: il vettore $(0, 1, -1) \in \mathrm{Ker} f$ e l'autospazio di f relativo all'autovalore -5 è $V_{-5} = \{(x, y, z)/x - y + 2z = 0\}$.

a) Dire se f è diagonalizzabile giustificando la risposta.

b) Scrivere il polinomio caratteristico di f.

c) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.