PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 CON ELEMENTI DI STORIA 2, MATEMATICA, 8/07/2015

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0.
Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritti come vettori righe.

Test 1. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Il piano α di equazione

$$x_1 - (1+i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 - 3 = 0\,:$$

V F (a) è isotropo;
V F (b) contiene esattamente una coppia di rette isotrope;
V F (c) è ortogonale ad almeno un piano isotropo passante per l'origine.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni

$$x_1 - (1-3i)\,x_2 - 2 = 0, (1+i)\,x_2 + x_3 + 1 = 0.$$

V F (a) la retta r non ha punti reali;
V F (b) esiste un piano reale che contiene r e $\overline{r}$;
V F (c) la proiezione di r dall'origine sul piano $x_3 = 1$ è una retta con un punto reale.

Test 3. Considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 - 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 - 3x_2 - x_3).$$

Considera inoltre l'omotetia ω_2 di rapporto 2 in $\mathbb{R}^3$.

V F (a) $h = f - \omega_2$ è nilpotente e il quoziente $\mathbb{R}^3/\mathrm{Ker}h$ ha dimensione 1;
V F (b) il vettore $(1, 1, 2)$ è un autovettore per f;
V F (c) f è triangolabile ma non diagonalizzabile.

Test 4. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, considera i punti $P[1, 0, 0, 2]$, $Q[0, 1, -1, 1]$, $T[1, 1, -1, 1]$.

V F (a) i punti P, Q, T sono allineati;
V F (b) ogni proiettività $\varphi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ che manda P, Q, T nel piano $x_0 = 0$ lascia fisso il punto Q;
V F (c) la stella di piani di centro P ha dimensione 2.

Test 5. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^5$, sia r la retta per $A[-2,1,0,1,0,0]$ e $B[1,0,0,0,1,1]$.

V F (a) l'iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $x_0 + 2x_2 - x_5 = 0$ contiene la retta r;
V F (b) il sottospazio duale di r ha dimensione 2;
V F (c) il sottospazio duale di r contiene il punto dello spazio duale di coordinate duali $[0,0,1,0,0,0]$.

Test 6. Considera l'inclusione del piano affine reale nel piano proiettivo numerico reale data da $(x,y) \mapsto [1,x,y]$. Considera la retta r di equazione $x + 2y - 3 = 0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $3x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$;
V F (c) esiste almeno una affinità che manda r nella retta $x = y$.

Test 7. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - x_0x_1 + x_0x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ contiene una retta passante per $[0,1,1]$;
V F (b) la conica Γ ha rango 2 e contiene la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$;
V F (c) il punto $P[3,1,1]$ è doppio per Γ.

Test 8. Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$:

V F (a) γ è una parabola di vertice $V(-\frac{1}{16}, -\frac{3}{16})$;
V F (b) la retta polare dell'origine rispetto a γ è $x = 0$.
V F (c) un fuoco di γ è contenuto nella retta di equazione $y = ix$.

Test 9. Nel piano euclideo complessificato, sia γ la conica di equazione

$$x^2 - 2y^2 - 4xy - 4x - 4y + 4 = 0$$

V F (a) γ è una iperbole con centro $(0,1)$;
V F (b) la retta $2x - y - 1 = 0$ è asse di simmetria per γ ;
V F (c) la retta $x - (2 - \sqrt{6})(y + 1) = 0$ è asintoto per γ.

Test 10. Sia assegnato il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice associata in base canonica è $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

V F (a) il radicale di φ ha dimensione 1;
V F (b) il sottospazio $x_3 = 0$ è non degenere rispetto al prodotto scalare indotto da φ;
V F (c) φ non ha vettori isotropi.