PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2, MATEMATICA, 01/07/2013

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette, 0 altrimenti.
Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici si scrivono come vettori righe.

Test 1. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r passante per i punti $A(2-5i, 1+i)$ e $B(5-4i, 2-2i)$.

V F (a) la retta r contiene un punto reale;
V F (b) la retta r è isotropa;
V F (c) la retta parallela a r e passante per il punto $C(-2, -3i)$ ha equazione $ix_1 + x_2 + 5i = 0$.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, fissa un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni $ix + (1+3i)y - (1+i)z - 3 - 8i = 0$, $(1-2i)x + (2-3i)y - iz - 5 + 7i = 0$.

V F (a) la retta r è parallela al piano di equazione $(2+2i)x - 5y - 4iz - 9 = 0$;
V F (b) la retta r è reale;
V F (c) la retta r è ortogonale ad un piano isotropo;

Test 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_3$ dei polinomi di grado al più 3 e coefficienti reali, considera il sottospazio U generato da $x^3 - 1$ e denota con $\pi : V \to V/U$ l'applicazione quoziente definita da $p(x) \mapsto [p(x)]$.

V F (a) lo spazio V/U ha dimensione 2;
V F (b) la posizione $[p(x)] \mapsto p(1)$ definisce una applicazione lineare $f : V/U \to V$;
V F (c) $[3 - x + 2x^2] = [1 - x + 2x^2 + 2x^3]$.

Test 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 - 9x_2 + 4x_3, 2x_2, -2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$ e denota con ω_2 l'omotetia di rapporto 2.

V F (a) l'applicazione $f - \omega_2$ ha rango 2;
V F (b) l'applicazione $(f - \omega_2)^2$ ha rango 2;
V F (c) esiste un polinomio di secondo grado $p(x)$ tale che $p(f)$ sia l'applicazione nulla;
V F (d) gli autospazi di f sono in somma diretta.

Test 5. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da $\varphi[x_0, x_1, x_2] = [3x_0 + 3x_1 - 2x_2, x_0 + 5x_1 - 2x_2, x_0 + 3x_1]$.

V F (a) il punto $P[-1, 1, 1]$ è fisso per φ;
V F (b) tutte le rette globalmente fissate da φ appartengono ad uno stesso fascio;
V F (c) φ ha tre punti fissi non allineati.

Test 6. Nella retta proiettiva numerica reale $\mathbb{P}^1$, considera i punti $A[1, 2]$, $B[-3, 1]$, $C[-1, 1]$, $D[-2, 1]$.

V F (a) i punti A, B, C, D sono in posizione generale;
V F (b) esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ in sè che lascia fissi A e B, ma scambia tra loro C e D;
V F (c) il birapporto $(ABCD)$ è $[3, 10]$.

Test 7. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^4$, considera la proposizione *il sottospazio congiungente tre punti non allineati ha codimensione 2.* La proposizione duale è equivalente a

V F (a) *l'intersezione di tre iperpiani a due a due distinti ha dimensione 2*;
V F (b) *se tre iperpiani contengono una stessa retta, la loro intersezione ha dimensione duale 2*;
V F (c) *se tre iperpiani non appartengono allo stesso fascio, si intersecano in un sottospazio di dimensione 1* .

Test 8. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $3x_1^2 + 6x_1x_2 - x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ ha equazione canonica proiettiva $y_0^2 + y_1^2 = 0$;
V F (b) la conica Γ contiene la retta di equazione $x_0 + 2x_1 = 0$;
V F (c) il punto $P[6, -2, 2]$ è doppio per Γ.

Test 9. Nel piano affine reale complessificato, considera un sistema di riferimento reale. La conica γ ha equazione $x^2 + 2xy - 6x - 10y + 1 = 0$:

V F (a) γ è una conica di centro $(5, -2)$, con un asintoto parallelo a $x = 0$;
V F (b) la retta $2x + y - 8 = 0$ è un diametro;
V F (c) uno degli asintoti di γ è parallelo alla retta $2x - y = 0$;
V F (d) la retta $(1 + i)x + y - (3 + 5i) = 0$ è la polare di un punto ciclico.

Test 10. Nel piano euclideo,complessificato, considera un sistema di riferimento reale ortonormale. La conica γ ha equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$:

V F (a) γ è una ellissi di centro $(1, -1)$;
V F (b) γ è una parabola di asse $x + y - 7 = 0$;
V F (c) γ è una parabola di asse $x + y + 2 = 0$;
V F (d) γ ha un diametro parallelo a $x - y = 0$.