UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA. Corso di Laurea in Matematica.
Esame di GEOMETRIA 1 CON ELEMENTI DI STORIA (Prof. F. Tovena)
Prova a svolgere in tre ore ogni raccolta di esercizi, riportando con chiarezza lo svolgimento.

1.1) In uno spazio vettoriale V di dimensione 3, sia assegnata una base $\mathcal{B}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \to V$ tale che $T(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$, $T(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

a) Determina la dimensione ed una base del nucleo di T.

b) Determina la dimensione e una base dell'immagine di T.

c) Controlla se l'immagine di T è in somma diretta con il nucleo di T.

1.2) In uno spazio affine reale di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Si consideri la retta r di equazioni $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + 1 = 0$ in un riferimento cartesiano, e la retta s passante per i punti $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 2)$.

a) Discuti se r e s sono sghembe.

b) Determina (se tale retta esiste) un sistema di equazioni parametriche per una retta t incidente sia r che s e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

c) Determina una equazione cartesiana per un piano α passante per l'origine e parallelo sia a r che ad s (se tale piano esiste).

1.3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate (x_1, x_2). Considera la retta r di equazione $x_1 + 2x_2 - 5 = 0$. Considera, inoltre, l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ abbiamo come immagine, rispettivamente, i punti $A'(2, 3)$, $B'(1, 1)$, $C'(-1, 2)$.

a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità φ.

b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine $\varphi(r)$ della retta r tramite φ.

1.4) Nello spazio affine numerico reale $\mathbf{A}^4_{\mathbf{R}}$, considera i punti $A(1, 0, 1, 1), B(1, 1, 0, 2), C(1, 2, -1, 3)$. Controlla se i punti A, B, C sono indipendenti e determina un sistema di equazioni cartesiane normali per il sottospazio da essi generato.

1.5) Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare di uno spazio vettoriale in sè.

a) Dimostra che la composizione $f^h = f \circ f \cdots \circ f$ è lineare per ogni h naturale..

b) Sia $\mathbf{v}$ un vettore tale che $f^4(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $f^3(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Mostra che i vettori $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{v})$, $f^2(\mathbf{v})$, $f^3(\mathbf{v})$ sono linearmente indipendenti.

2.1) Nello spazio vettoriale reale $\mathbf{R}^4$ considera i vettori $\mathbf{v}_1 = (-6, 3, -4, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-4, 2, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Considera inoltre il sottospazio W di equazioni $x_2 = 0$ e il sottospazio U generato dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

a) Controlla se i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti.

b) Determina la dimensione e una base dell'intersezione tra i sottospazi U e W.

c) Determina la matrice, rispetto alla base canonica in dominio e codominio, dell'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Determina inoltre una base dell'immagine di U tramite f.

2.2) In uno spazio affine di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\})$ con coordinate (x_1, x_2, x_3). Considera il piano α di equazione $3x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$; considera inoltre la retta r per i punti $A(1, 1, 1)$ e $B(2, 0, -1)$ la retta s per A e parallela al vettore $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

a) Discuti se la retta r è parallela ad α .

b) Determina l'intersezione tra il piano α e la retta s.

c) Determina dimensione e equazioni cartesiane per l'intersezione tra il piano α e il piano β generato da r e s.

2.3) In un piano affine reale $\mathbf{A}$, sia fissato un sistema di riferimento $(O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})$ con coordinate (x_1, x_2). Considera, inoltre, l'affinità $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ tale che i punti $A(1,1)$, $B(3,-1)$, $C(-1,2)$ abbiano come immagine, rispettivamente, i punti $A'(0,0)$, $B'(1,0)$, $C'(0,1)$.

a) Determina le equazioni e il rango dell'affinità φ.

b) Determina l'equazione cartesiana dell'immagine tramite φ della retta r per A e per $D(3,0)$.

2.4) Nello spazio affine numerico reale di dimensione 5, considera il punto $A(2,-1,2,1,3)$ e il sottospazio S di equazioni $x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0$.

a) Scrivi le equazioni dell'omotetia di centro A e rapporto 4.

b) Determina una base per la giacitura di S e la sua dimensione.

c) Discuti se S è parallelo all'iperpiano di equazione $2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 7 = 0$.

3.1) Nello spazio vettoriale V delle matrici 2×2 a coefficienti reali, considera le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(\mathbf{A}_1) = (1,0,1)$, $f(\mathbf{A}_2) = (2,-1,1)$, $f(\mathbf{A}_3) = (1,-1,0)$, $f(\mathbf{A}_4) = (0,1,1)$.

a) Verifica che $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ formano una base di V.

b) Determina la dimensione e una base di Ker f e Im f, rispettivamente.

c) Scrivi la matrice che rappresenta f rispetto alla base standard di V nel dominio e alla base canonica in $\mathbf{R}^3$ nel codominio.

d) Considera l'applicazione lineare $g_a : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $g(x,y,z) = x + y + az$. Determina, se esiste, $a \in \mathbf{R}$ tale che $g_a \circ f$ sia l'applicazione nulla.

3.2) In uno spazio affine reale di dimensione 6, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale $(O, \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\})$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Considera i punti $A(1,0,1,1,0,2)$, $B(2,0,1,-1,-1,0)$, $C(2,0,1,-1,-1,0)$ e l'iperpiano α di equazione $3x_1 + x_2 - x_3 - x_6 = 0$.

a) Determina equazioni cartesiane per la retta r passante per A e per B.

b) Determina equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio β generato da A, B e C.

c) Determinare la dimensione e un sistema massimale di punti indipendenti nel sottospazio intersezione tra β e α.

3.3) a) In $\mathbf{R}^4$, sia U il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ e sia W il sottospazio generato da

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determina la dimensione e una base del sottospazio $U \cap W$.

b) Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici reali con n colonne, e $\mathbf{C}$ una matrice le cui righe sono le righe di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$. Denota con U il sottospazio di $\mathbf{R}^n$ delle soluzioni di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in n e con W il sottospazio delle soluzioni di $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. È vero che, se $\mathbf{R}^n$ è la somma diretta di U e W, allora rg $(\mathbf{C})$ = rg $(\mathbf{A})$ + rg $(\mathbf{B})$? È vero il viceversa?