PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2, MATEMATICA, 19/01/2015

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0. Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritte come vettori righe.

Test 1. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(1-i, 2i)$.

V F (a) una retta isotropa per P contiene un punto reale;
V F (c) esiste una retta reale per P;
V F (b) la retta passante per per P e parallela alla retta $(2+i)x - iy = 0$ contiene il punto $Q(3-i, 2+2i)$;

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r passante per $P(i, 1-i, 3i)$ e ortogonale al piano $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

V F (a) la retta r e la sua coniugata sono incidenti;
V F (b) esiste una unica retta reale ortogonale a r e passante per P;
V F (c) esiste un unico piano reale parallelo a r e passante per l'origine.

Test 3. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [-4x_0 + 3x_1 - 2x_2, -3x_1, -x_0 + 3x_1 - 5x_2].$$

V F (a) il punto $P[1,1,1]$ e il punto $Q[1,0,1]$ sono fissi per φ;
V F (b) la retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ per P e per $U_1[0,1,0]$ è globalmente fissa per φ;
V F (c) φ ha solo tre punti fissi.

Test 4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^5$, considera il sottospazio W di equazioni $x_1 - x_2 + x_5 = 0, 2x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

V F (a) V/W ha dimensione 3;
V F (b) le classi $[\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_4]$ sono linearmente indipendenti in V/W.
V F (c) l'applicazione $f : V \to V$ definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 + x_5, 0, 0, x_1 + x_4 - x_5, 0)$ induce una applicazione sul quoziente $\overline{f} : V/W \to V/W$ definita da $\overline{f}([(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]) = [f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$.

Test 5. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, considera la retta r per $A[1,0,0,1]$ e $B[-1,1,1,1]$. Siano $[u_0,u_1,u_2,u_3]$ le coordinate duali nello spazio proiettivo duale.

V F (a) il piano di equazione $x_0+x_1+x_2-x_3=0$ contiene la retta r;

V F (b) il sottospazio duale di r contiene il punto dello spazio duale di coordinate duali $[1,1,1,-1]$;

V F (c) il sottospazio duale di r è contenuto nel piano dello spazio duale di equazione $u_1+u_2+2u_3=0$.

V F (c) La proposizione seguente è autoduale: *Due rette distinte e incidenti generano un sottospazio di dimensione 2.*

Test 6. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x,y)\mapsto[1,x,y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $3x-2y-1=0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $3x_0-2x_1-x_2=0$ è parallela ad r;

V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $-x_0+3x_1-2x_2=0$;

V F (c) il birapporto di $A(0,2)$, $B(0,-1)$, $C(0,-3)$, $D(0,1)$ è $[5,-1]$.

Test 7. Sia γ la circonferenza di centro il punto $(1,-1)$ e passante per l'origine:

V F (a) γ ha equazione $x^2+y^2-2x+2y=0$;

V F (c) la retta tangente a γ nell'origine ha equazione $x+y=0$.

V F (d) il parallelogramma di vertici l'origine e i due punti di intersezione di γ con gli assi x e y è un quadrato.

Test 8. Nel piano euclideo complessificato sia fissato un riferimento monometrico ortonormale reale. La conica di equazione $x^2+2txy+y^2+t=0$ (con $t\in\mathbf{R}$):

V F (a) è non degenere se $t\neq\pm1$;

V F (b) per $t<-1$ è una iperbole;

V F (c) è una ellisse a punti reali se e solo se $-1<t<0$.

Test 9. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2-3xy+2y^2+2y=0$:

V F (a) è una iperbole;

V F (c) ha due asintoti non paralleli;

V F (d) ha due vertici, che distano tra loro $4\sqrt{\frac{2}{\sqrt{10}-3}}$.

Test 10. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0,x_1,x_2]$ e la conica Γ di equazione $2x_0^2+3x_1^2+6x_2^2+7x_0x_1+7x_0x_2+11x_1x_2=0$.

V F (a) la conica Γ contiene la retta passante per $[0,3,-1]$ e per $[2,1,0]$;

V F (b) la conica Γ ha rango 2;

V F (c) il punto $A[7,1,-5]$ è doppio per Γ.