

## Quadriche

In questo capitolo verrà affrontato lo studio delle quadriche dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  e delle loro principali proprietà. Ci occuperemo principalmente del caso  $n = 2$ .

Da questo studio, si possono trarre informazioni utili anche qualora l'ambiente sia il seguente, indicato con

$$(\star) \quad \begin{cases} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n & \text{la cui complessificazione è } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^n & \text{la cui complessificazione è } \mathbb{E}_{\mathbb{C}}^n \end{cases}$$

Talora si utilizzerà il simbolo  $\mathbb{P}^n$  quando l'asserto considerato resta valido anche nell'ambiente  $(\star)$ .

### 7.1 Quadriche

Consideriamo fissato un sistema di coordinate omogenee  $[X_0, \dots, X_n]$  in  $\mathbb{P}^n$ .

**Definizione 7.1.1.** Una *quadrica* proiettiva  $\Gamma$  è una ipersuperficie definita da una equazione omogenea  $f(X_0, \dots, X_n) = 0$  di secondo grado. Si assume che l'equazione sia reale, qualora si lavori nell'ambiente  $(\star)$ .

Se  $n = 2$ , le quadriche vengono dette *coniche*.

*Osservazione 7.1.2.* L'equazione  $f(X_0, \dots, X_n) = 0$  definisce un sottoinsieme dello spazio proiettivo perché  $f(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^2 f(X_0, \dots, X_n)$ .

Una quadrica individua la sua equazione di secondo grado  $f(X_0, \dots, X_n) = 0$  solo a meno di multiplo per una costante non nulla.

Per comodità, scriveremo anche  $f(X_0, \dots, X_n) = f(\mathbf{X})$ .

Ricordando che  $f(X_0, \dots, X_n)$  è un polinomio omogeneo di secondo grado, si può scrivere:

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} b_{ij} X_i X_j.$$

Ponendo:

$$a_{ii} = b_{ii} \quad i = 0, \dots, n \quad (7.1)$$

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{2} \quad \text{se } i < j$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{se } i > j \quad (7.2)$$

resta individuata una matrice quadrata simmetrica  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  tale che

$$f(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} X_i X_j = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} \quad \text{ove } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Diremo che  $\mathbf{A}$  rappresenta la quadrica  $\Gamma$  di equazione  $f\mathbf{X} = 0$  nel riferimento scelto, o che è la matrice associata alla quadrica  $\Gamma$  nel riferimento scelto. Osserviamo che, fissato il sistema di coordinate, la matrice  $\mathbf{A}$  è individuata dalla quadrica solo a meno di multiplo per una costante non nulla.

**Definizione 7.1.3.** Sia  $f$  un polinomio omogeneo di secondo grado e sia  $\mathbf{A}$  la matrice simmetrica associata a  $f$ , come sopra. Si dice *forma bilineare associata a  $f$*  e si denota con  $\Omega_f$  la forma bilineare simmetrica:

$$\begin{aligned} \Omega_f : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^t \mathbf{A} \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

*Esempio 7.1.4.* a) Alla conica di equazione  $X_0^2 + 2X_0X_1 + 2X_1^2 - X_0X_2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0$  è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

b) Alla quadrica di  $\mathbb{P}^3$  di equazione  $X_0^2 + X_0X_1 + X_1X_2 - X_2^2 + X_0X_3 + X_3^2 = 0$  è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o equivalentemente } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

*Osservazione 7.1.5.* La forma bilineare  $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  è un prodotto scalare, e inoltre vale l'identità di Eulero:

$$\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \quad (7.7)$$

e dunque  $f$  è la forma quadratica associata a  $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

Poiché la matrice  $\mathbf{A}$  è simmetrica, ponendo  $f_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^n a_{ij} X_j$  ( $i = 0, \dots, n$ ), si ricava:

$$\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{X}) Y_i = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{Y}) X_i. \quad (7.8)$$

Per capire come si modifica la matrice che rappresenta la quadrica  $\Gamma$  al variare del riferimento in  $\mathbb{P}^n$ , si consideri un nuovo riferimento  $\mathcal{R}'$ , con coordinate omogenee  $\mathbf{X}'$ , e la corrispondente legge della trasformazione delle coordinate  $\rho\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X}'$ . Nel riferimento  $\mathcal{R}'$ , l'equazione di  $\Gamma$  sarà data da  $f'(\mathbf{X}') = \mathbf{X}'^t \mathbf{B} \mathbf{X}'$ , la cui forma bilineare associata è  $\Omega_{f'}(\mathbf{X}', \mathbf{Y}') = \mathbf{X}'^t \mathbf{B} \mathbf{Y}'$ . La relazione tra le matrici associate a  $\Gamma$  nei due riferimenti è data da

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M},$$

come si ricava osservando che  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}'^t (\mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M}) \mathbf{X}'$ .

In particolare, la definizione di quadrica è ben posta, non dipendendo dal sistema di coordinate omogenee.

*Osservazione 7.1.6.* i)  $\det(\mathbf{M}^t \mathbf{A} \mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^2 \det \mathbf{A}$ . In particolare, l'essere determinante nullo ha significato proiettivo. Inoltre, nell'ambiente  $(\star)$ , il segno del determinante ha significato proiettivo.

ii) Il rango della matrice associata ad una quadrica  $\Gamma$  ha significato proiettivo: esso viene detto *rango della quadrica* e denotato con il simbolo

$$\text{rg } \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{rg } \mathbf{A}.$$

iii) La quadrica individua l'applicazione bilineare associata solo a meno di multiplo per una costante non nulla.

**Definizione 7.1.7.** Una quadrica è *degenere* se e solo se non ha rango massimo. La quadrica è *non degenere* se ha rango massimo.

*Esempio 7.1.8.* Caso  $n = 1$ . Un polinomio complesso omogeneo di secondo grado in due indeterminate è necessariamente della forma:

$$\begin{aligned} f(X_0, X_1) &= (a_0 X_0 - b_0 X_1)(a_1 X_0 - b_1 X_1) = \\ &= a_0 a_1 X_0^2 - (a_0 b_1 + a_1 b_0) X_0 X_1 + b_0 b_1 X_1^2 \end{aligned} \quad (7.9)$$

la cui matrice associata è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 a_1 & -\frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{2} \\ -\frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{2} & b_0 b_1 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

In particolare, ogni quadrica sulla retta proiettiva è composta da 2 punti  $P_0[b_0, a_0]$ ,  $P_1[b_1, a_1]$  (eventualmente coincidenti).

Il determinante di  $\mathbf{A}$  è dato da

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_0 a_1 b_0 b_1 - \frac{(a_0 b_1 + a_1 b_0)^2}{4} = \\ &= -\frac{(a_0 b_1)^2}{4} - \frac{(a_1 b_0)^2}{4} + \frac{2a_0 a_1 b_0 b_1}{4} = \\ &= -\frac{(a_1 b_0 - a_0 b_1)^2}{4} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow [b_0, a_0] = [b_1, a_1] \end{aligned} \quad (7.12)$$

In altre parole,  $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$  la quadrica di equazione  $f = 0$  è composta da un unico punto, e diciamo che esso ha compare con molteplicità 2.

Mettiamo in evidenza la relazione tra il determinante  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$  e il discriminante del polinomio  $f(X_0, X_1) = aX_0^2 + 2bX_0X_1 + cX_1^2$ .

*Osservazione 7.1.9.* L'esempio precedente mostra che, due polinomi omogenei di secondo grado  $f$  e  $g$  definiscono la stessa quadrica in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \Leftrightarrow f$  e  $g$  sono proporzionali con costante di proporzionalità non nulla. È possibile provare un analogo risultato anche per  $n > 1$  in modo diretto, senza ricorrere al teorema degli zeri.

**Definizione 7.1.10.** Una quadrica  $\Gamma$  di equazione  $f(\mathbf{X}) = 0$  si dice *riducibile* se il polinomio  $f$  può essere scritto come prodotto  $f = gh$  di fattori di grado 1 (che sono automaticamente omogenei).

Per l'esempio precedente, una quadrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  è sempre riducibile.

Se una quadrica  $\Gamma$  di equazione  $f(\mathbf{X}) = 0$  è riducibile, e  $f = gh$  è una decomposizione, le equazioni  $g = 0$  e  $h = 0$  definiscono due iperpiani  $H_g$  e  $H_h$ . Diciamo che  $H_g$  e  $H_h$  sono le *componenti irriducibili* di  $\Gamma$  e scriviamo  $\Gamma = H_g + H_h$ . Se, inoltre,  $H_g = H_h$ , cioè  $f$  è il quadrato di un polinomio omogeneo di primo grado, allora diciamo che *la componente*  $H_g (= H_h)$  ha *molteplicità due* in  $\Gamma$  e scriviamo  $\Gamma = 2H_g$ .

Per  $n = 2$ , un iperpiano è una retta e le componenti di una conica riducibile sono rette.

**Lemma 7.1.11.** *Ogni conica riducibile  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  è degenera. In particolare  $\text{rg } \Gamma \leq 2$ . Più precisamente,*

- a) *se  $\Gamma$  è composta da una retta con molteplicità 2, allora  $\text{rg } \Gamma = 1$ .*
- b) *se  $\Gamma$  è composta da due rette distinte, allora  $\text{rg } \Gamma = 2$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\Gamma$  è riducibile, è della forma  $\Gamma = r_1 + r_2$  per opportune rette  $r_1$  e  $r_2$ . E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui  $r_1$  abbia equazione  $X_0 = 0$ . Sia  $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$  una equazione di  $r_2$  in tale riferimento.

La conica  $\Gamma$  ha dunque equazione  $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 = 0$  e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Osservando la matrice, si vede che  $\text{rg } \mathbf{A} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow r_1 = r_2 \\ 2 & \Leftrightarrow r_1 \neq r_2 \end{cases}$  e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

□

Una dimostrazione analoga permette non solo di dimostrare il precedente risultato in dimensione maggiore, ma anche di rafforzarlo dimostrando il viceversa. Ritroveremo questa seconda parte del risultato anche attraverso una differente dimostrazione nel seguito.

**Lemma 7.1.12.** *Ogni quadrica riducibile  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  (con  $n \geq 1$ ) è degenera. In particolare  $\text{rg } \Gamma \leq 2$ . Più precisamente,*

- a)  *$\Gamma$  è composta da un iperpiano contato con molteplicità 2, se e solo se  $\text{rg } \Gamma = 1$ .*
- b)  *$\Gamma$  è composta da due iperpiani distinti, se e solo se  $\text{rg } \Gamma = 2$ .*

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ ): Se  $\Gamma$  è riducibile, è della forma  $\Gamma = H_1 + H_2$  per opportuni iperpiani  $H_1$  e  $H_2$ . E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui  $H_1$  abbia equazione  $X_0 = 0$ . Sia  $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = 0$  una equazione di  $H_2$  in tale riferimento.

La quadrica  $\Gamma$  ha dunque equazione  $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + \dots + a_nX_0X_n = 0$  e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \dots & \frac{a_n}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_n}{2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Osservando la matrice, si vede che  $\text{rg } \mathbf{A} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow H_1 = H_2 \\ 2 \Leftrightarrow H_1 \neq H_2 \end{cases}$  e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

$\Leftarrow$ ): Supponiamo che  $\text{rg } \mathbf{A} = 1$ . In tal caso (cf. anche [1], Cor. 10.28, pag. 158), esistono un vettore riga numerico  $\mathbf{a}$  e scalari non tutti nulli  $\rho_0, \dots, \rho_n$  tali che:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_0 \mathbf{a} \\ \rho_1 \mathbf{a} \\ \vdots \\ \rho_n \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a}. \quad (7.15)$$

È possibile scegliere una matrice non singolare  $\mathbf{B}$  tale che  $(\rho_0, \dots, \rho_n) \mathbf{B} = (1, 0, \dots, 0)$ . Si scelga il sistema di riferimento corrispondente al cambio di coordinate  $\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X}'$ . L'equazione di  $\Gamma$ , nel nuovo sistema di coordinate, è diventata

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'^t \mathbf{B}^t \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{X}' &= \mathbf{X}'^t \mathbf{B}^t \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a} \mathbf{B} \mathbf{X}' = \mathbf{X}'^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{a} \mathbf{B} \mathbf{X}' = \\ &= X'_0 (\mathbf{a} \mathbf{B} \mathbf{X}') = 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

mettendo in evidenza che  $\Gamma$  è riducibile, contenendo l'iperpiano di equazione  $X'_0 = 0$ . Per quanto osservato, poiché  $\mathbf{A}$  ha rango uno,  $\Gamma$  deve essere composta da un iperpiano con molteplicità 2.

Supponiamo ora che  $\text{rg } \mathbf{A} = 2$ . Sia  $S = \{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che  $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = 0 \ \forall i = 2, \dots, n$ . Si completi  $S$  ad una base  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$  di  $\mathbb{C}^{n+1}$  e si consideri il riferimento che ha  $[\mathbf{v}_0], \dots, [\mathbf{v}_n]$  come punti fondamentali. Se  $\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X}'$  descrive il cambiamento di coordinate, la matrice  $\mathbf{B}^t \mathbf{A} \mathbf{B}$  di  $\Gamma$  nel nuovo sistema è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & 0 \\ b & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

con  $ad - b^2 \neq 0$ . Dunque, nel nuovo sistema,  $\Gamma$  è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo in due variabili, che necessariamente si fattorizza propriamente. Dunque  $\Gamma$  è riducibile. Per quanto prima osservato,  $\Gamma$  si deve allora decomporre come somma di due iperpiani distinti, altrimenti il rango sarebbe 1.

In particolare, si ritrova il seguente risultato:

**Corollario 7.1.13.** *La quadrica  $\Gamma$  è riducibile  $\Leftrightarrow \Gamma$  contiene un iperpiano.*

## 7.2 Intersezione con una retta

Fissato un riferimento di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , sia  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  l'equazione di una quadrica  $\Gamma$  e sia  $\Omega_f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{Y}$  la forma bilineare associata.

Una retta  $r$  di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  è individuata da due suoi punti distinti  $P[\mathbf{p}]$ ,  $Q[\mathbf{q}]$  ed ogni suo punto  $X$  ha coordinate della forma  $X[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$ . L'intersezione tra  $\Gamma$  ed  $r$  è definita dall'equazione:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= f(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) = (\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q})^t \mathbf{A}(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) = \\ &= \lambda^2 f(\mathbf{p}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu^2 f(\mathbf{q}) = 0 \end{aligned}$$

(da interpretare come equazione nei parametri  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  della retta  $r$ ) il cui discriminante è dato da:

$$\Delta = \Omega_f^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{p})f(\mathbf{q}). \quad (7.18)$$

*Osservazione 7.2.1.* a)  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$  l'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$  è composta da due punti distinti  $A_1$  e  $A_2$ : in tal caso, diciamo che la *molteplicità di intersezione in  $A_i$  tra la retta  $r$  e la quadrica  $\Gamma$*  è 1 ( $i = 1, 2$ ).

b)  $\Delta = 0$  e sono nulli tutti i coefficienti  $f(\mathbf{p})$ ,  $f(\mathbf{q})$ ,  $\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  dell'equazione  $\Leftrightarrow$  la retta  $r$  è interamente contenuta in  $\Gamma$ .

c)  $\Delta = 0$  e l'equazione (7.18) non è identicamente nulla  $\Leftrightarrow$  l'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$  è composta da un'unico punto  $A$ : diciamo che la *molteplicità di intersezione in  $A$  tra la retta e la quadrica* è 2.

Si trova dunque il

**Teorema 7.2.2. Teorema di Bézout.** In  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , siano assegnati una retta  $r$  e una quadrica  $\Gamma$ . Se  $r \not\subset \Gamma$ , allora l'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$  è composta da due punti, da contare con molteplicità pari alla molteplicità di intersezione.

**Corollario 7.2.3.** a) Una retta ed una quadrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  si intersecano sempre in almeno un punto.

b) Ogni quadrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , con  $n \geq 2$ , ha infiniti punti.

*Osservazione 7.2.4.* Più in generale, se  $\mathbf{Z}$  è un sottospazio, l'intersezione  $\Gamma_{\mathbf{Z}} = \Gamma \cap \mathbf{Z}$  è una quadrica di  $\mathbf{Z}$ , oppure  $\mathbf{Z} \subset \Gamma$ .

*Esempio 7.2.5.* Sia  $\Gamma$  la conica di equazione  $X_0^2 + X_2^2 + X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2 = 0$ ; siano  $r$  la retta di equazione  $X_0 = 0$ ,  $s$  la retta di equazione  $2X_0 + X_1 + 2X_2 = 0$ ,  $t$  la retta di equazione  $X_0 + X_2 = 0$ .

L'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$  è regolata dal sistema

$$X_0 = 0, X_0^2 + X_2^2 + X_0X_1 + 2X_0X_2 + X_1X_2$$

cioè

$$X_0 = 0, X_2^2 + X_1X_2 = X_2(X_2 + X_1) = 0$$

L'intersezione è data da due punti reali:  $[0, 1, 0]$  e  $[0, 1, -1]$ .

Sostituendo  $X_1 = -2X_0 - 2X_2$  nell'equazione di  $\Gamma$  e procedendo in modo analogo si mostra che la retta  $s$  interseca  $\Gamma$  in un unico punto  $[1, 0, -1]$ , con molteplicità di intersezione 2.

Infine, la retta  $t$  è interamente contenuta in  $\Gamma$ : infatti, sostituendo  $X_0 = -X_2$  nell'equazione di  $\Gamma$  si trova l'equazione sempre verificata  $0 = 0$ .  $\square$

**Definizione 7.2.6.** In  $\mathbb{P}^n$ , un punto  $P$  di una quadrica  $\Gamma$  si dice *doppio* o *singolare* per la quadrica se, per ogni retta  $r$  che passa per  $P$ , accade che  $r \subset \Gamma$  oppure la retta  $r$  ha molteplicità di intersezione 2 con  $\Gamma$  in  $P$ . Un punto  $P \in \Gamma$  che non è doppio, si dice *semplice*, o *liscio* o *non singolare* per  $\Gamma$ .

Una quadrica  $\Gamma$  si dice *non singolare* o *liscia* se tutti i suoi punti sono semplici per  $\Gamma$ . La quadrica si dice *singolare* se ha almeno un punto doppio. L'insieme dei punti doppi di una quadrica  $\Gamma$  si denota con

$$\text{Sing}(\Gamma)$$

e viene chiamato il *luogo singolare* di  $\Gamma$ .

Come riconoscere un punto doppio? Sia  $P[\mathbf{p}]$  un fissato punto di  $\Gamma$ , cioè  $f(\mathbf{p}) = 0$ . Sia  $Q[\mathbf{q}]$  un punto qualunque di  $\mathbb{P}^n$ , distinto da  $P$ . Un punto  $X$  della retta congiungente  $P$  ed  $Q$  ha coordinate della forma  $X[\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}]$ . Come precedentemente osservato, l'intersezione della retta generata da  $P$  ed  $Q$  e la quadrica  $\Gamma$  è data dall'equazione (nei parametri della retta)

$$\lambda^2 f(\mathbf{p}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu^2 f(\mathbf{q}) = 0 \quad (7.19)$$

che, ricordando che  $P$  appartiene alla quadrica, si semplifica in

$$\mu(2\lambda\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu f(\mathbf{q})) = 0 \quad (7.20)$$

Poichè il punto  $P$  corrisponde alla soluzione  $\mu = 0$ , riusciamo a caratterizzare in modo effettivo i punti doppi, e a capire come sono disposti nella quadrica:

**Proposizione 7.2.7.** *a) Il punto  $P = P[\mathbf{p}] \in \Gamma$  è doppio per  $\Gamma \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X})$  è identicamente nullo come polinomio in  $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{p}^t \mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .*

*Un punto  $P = P[\mathbf{p}] \in \Gamma$  è semplice per  $\Gamma \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X})$  non è identicamente nullo come polinomio in  $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{p}^t \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ .*

*b) L'insieme  $\text{Sing}(\Gamma)$  dei punti doppi di una quadrica  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}^n$  forma un sottospazio proiettivo di dimensione  $n - \text{rg}(\Gamma)$ .*

*In particolare, la quadrica  $\Gamma$  è singolare se e solo è degenere.*

*Dimostrazione.* Il punto  $P$  è doppio se e solo se, per ogni punto  $Q$ , la relazione (7.20) ammette la radice  $\mu = 0$  con molteplicità 2, il che avviene se e solo se  $\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0$  per ogni  $\mathbf{X}$ .

b) Per quanto visto,  $\text{Sing}(\Gamma)$  è definito dalla condizione  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ .  $\square$

*Osservazione 7.2.8.* L' $i$ -esimo punto fondamentale  $U_i[0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$  del sistema di riferimento è singolare per  $\Gamma \Leftrightarrow$  la  $i$ -esima riga  $\mathbf{a}_i$  di  $\mathbf{A}$  è nulla  $\Leftrightarrow$  la  $i$ -esima colonna  $\mathbf{a}^i$  di  $\mathbf{A}$  è nulla  $\Leftrightarrow$  nell'espressione di  $f$  non compare la variabile  $X_i$ .

Per il teorema di Bézout, se l'intersezione di una retta  $r$  con una quadrica  $\Gamma$  contiene un punto  $P$  doppio per  $\Gamma$  ed un altro punto  $Q \neq P$ , allora la retta  $r$  è necessariamente contenuta in  $\Gamma$ . Questo ci permetterà di trarre informazioni su come è fatta una quadrica che contiene punti doppi. Iniziamo, per semplicità, dal caso delle coniche:

**Corollario 7.2.9.** *Una conica  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  è non singolare se  $\text{rg}(\Gamma) = 3$ .*

*Se, invece, una conica è singolare, si presenta uno dei seguenti casi:*

- i)  $\text{rg}(\Gamma) = 2$ :  $\Gamma$  è composta da due rette distinte  $r_1$  e  $r_2$  e  $\text{Sing}(\Gamma)$  è formato dal punto di intersezione tra  $r_1$  e  $r_2$ . In tal caso, ogni retta che non passi per  $r_1 \cap r_2$  interseca  $\Gamma$  in due punti distinti e diciamo che  $\Gamma$  è semplicemente degenere.*
- ii)  $\text{rg}(\Gamma) = 1$ :  $\Gamma$  è composta da una retta  $r$  con molteplicità 2 e tutti i punti sono doppi:  $\text{Sing}(\Gamma) = r$ ; inoltre, ogni retta distinta da  $r$  interseca  $\Gamma$  in un punto doppio. Si dice che  $\Gamma$  è doppiamente degenere.*

*Dimostrazione.* i) Segue direttamente dalla Proposizione 7.2.7 e dal Teorema di Bézout.

ii) Se  $\Gamma$  ha un unico punto doppio  $P$ , allora esiste almeno una retta  $s$  che non passa per  $P$  e interseca  $\Gamma$  in due punti distinti  $A_1$  e  $A_2$ . Allora la retta  $r_1$  per  $P$  e  $A_1$  deve essere interamente contenuta in  $\Gamma$ ; analogamente, la retta  $r_2$  per  $P$  e per  $A_2$  deve essere contenuta in  $\Gamma$ , che risulta quindi essere l'unione di  $r_1$  e  $r_2$ . A posteriori, si osserva che una qualunque retta che non passa per  $P$  interseca  $\Gamma$  in due punti distinti.

iii) Se  $\Gamma$  ha una retta  $r$  di punti doppi, sia  $P \notin r$  e sia  $s$  una retta per  $P$ ; la retta  $s$  interseca  $r$  in un punto con molteplicità 2; dunque  $s \cap \Gamma = s \cap r$  e, in particolare,  $P \notin \Gamma$ . Facendo variare il punto  $P \notin \Gamma$ , si deduce che  $\Gamma = 2r$ .  $\square$

**Corollario 7.2.10.** *Una conica è degenera se e solo se contiene una retta.*

Ed ora l'analogo in dimensione maggiore. Osserviamo che, se un sottospazio proiettivo  $\Sigma$  non è contenuto in una quadrica  $\Gamma$ , la restrizione dell'equazione di  $\Gamma$  ai punti di  $\Sigma$  definisce una quadrica su  $\Sigma$ , che prende il nome di *quadrica intersezione* e viene denotata con il simbolo  $\Gamma_\Sigma$ .

**Proposizione 7.2.11.** *Sia  $\Gamma$  una quadrica singolare di  $\mathbb{P}^n$  ( $n \geq 2$ ) di rango  $r$  e sia  $\Sigma$  un sottospazio di dimensione  $r - 1$  sghembo con  $Sing(\Gamma)$ . Allora:*

- a) *la quadrica intersezione  $\Gamma_\Sigma = \Gamma \cap \Sigma$  è non degenera;*
- b)  *$\Gamma = \cup_{P \in \Gamma_\Sigma} P \vee Sing(\Gamma)$  è unione delle rette che contengono un punto di  $\Gamma_\Sigma$  e un punto doppio di  $\Gamma$ .*

*Dimostrazione.* E' possibile scegliere i punti fondamentali  $P_0, \dots, P_n$  del riferimento in modo che  $\Sigma = P_0 \vee \dots \vee P_r$  e  $Sing(\Gamma) = P_{r+1} \vee \dots \vee P_n$ . L'equazione  $f(X_0, \dots, X_n) = 0$  di  $\Gamma$  in tale riferimento non dipende dalle variabili  $X_{r+1}, \dots, X_n$  e l'equazione di  $\Gamma_\Sigma$  è  $f = 0$  pensata come equazione nelle sole variabili  $X_0, \dots, X_r$  (che risulta essere una equazione non nulla). Se  $\Gamma_\Sigma$  fosse degenera, si potrebbe scegliere  $P_0 \in Sing(\Gamma_\Sigma)$  e in tal caso  $f$  non dipenderebbe nemmeno da  $X_0$ ; ma allora,  $P_0 \in Sing(\Gamma)$ , che è assurdo. Ciò prova l'asserto a).

L'asserto b) si dimostra osservando che ogni retta congiungente un punto di  $\Gamma_\Sigma$  e un punto doppio di  $\Gamma$  deve essere interamente contenuta in  $\Gamma$ , per il Teorema di Bézout.  $\square$

**Proposizione 7.2.12.** *Se  $n \geq 2$ , una quadrica  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$*

$$\text{è riducibile} \Leftrightarrow \text{rg } \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{rg } \mathbf{A} \leq 2.$$

*Più precisamente,*

- a)  $\text{rg } \Gamma = 1 \Leftrightarrow \Gamma$  *è composta da un iperpiano con molteplicità 2,*
- b)  $\text{rg } \Gamma = 2 \Leftrightarrow \Gamma$  *è composta da due iperpiani distinti.*

*Inoltre,  $\Gamma$  è riducibile se e solo se contiene un iperpiano.*

*Esempio 7.2.13.* Sia  $\Gamma$  una quadrica di  $\mathbb{P}^3$  di rango  $r$ .

- i)  $r = 3$ :  $Sing(\Gamma)$  è un punto  $V$  e  $\Gamma$  è il cono di vertice  $V$  e direttrice una conica non singolare contenuta in un piano non passante per  $V$ .
- ii)  $r = 2$ :  $\Gamma$  è composta da due iperpiani distinti  $H_1$  e  $H_2$  con molteplicità 1,  $Sing(\Gamma)$  la retta intersezione tra  $H_1$  e  $H_2$ ,  $\Sigma$  è una retta sghemba con  $Sing(\Gamma)$ . Si dice che  $\Gamma$  è *doppiamente degenera*.

iii)  $r = 1$ :  $\Gamma$  è composta da un iperpiano  $H$  con molteplicità 2,  $Sing(\Gamma) = H$ ,  $\Sigma$  è un punto esterno ad  $H$ . Si dice che  $\Gamma$  è *triplamente degenera*.

Torniamo ora a studiare i punti semplici della quadrica:

**Definizione 7.2.14.** Una retta  $r$  è *tangente* alla quadrica  $\Gamma$  in un punto semplice  $P \in \Gamma$  se contiene  $P$  e vale una delle seguenti

- i) ha molteplicità di intersezione 2 con  $\Gamma$  in  $P$ ,
- ii)  $r \subset \Gamma$ .

Se una retta  $r$  non è contenuta in  $\Gamma$  ma è tangente a  $\Gamma$  in un punto semplice  $P$ , allora l'intersezione tra  $r$  e  $\Gamma$  è la quadrica singolare su  $r$  formata dal punto  $P$  con molteplicità 2.

**Teorema 7.2.15.** Sia  $P = P[\mathbf{p}] \in \Gamma$  un punto semplice. Allora il luogo dei punti  $Q = Q[\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^n$  tali che la retta  $r$  per  $P$  e  $Q$  sia tangente a  $\Gamma$  in  $P$  è un iperpiano (detto iperpiano tangente a  $\Gamma$  in  $P$ ) definito dall'equazione:

$$\begin{aligned}\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{p} = 0\end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Segue dalla equazione (7.20) e dalla discussione ad essa precedente.  $\square$

**Corollario 7.2.16.** Se  $n = 2$ , sia  $P = P[\mathbf{p}] \in \Gamma$  un punto semplice di una conica  $\Gamma$ . Allora il luogo dei punti  $Q = Q[\mathbf{X}] \in \mathbb{P}^2$  tali che la retta  $r$  per  $P$  e  $Q$  sia tangente a  $\Gamma$  in  $P$  è una retta (detta retta tangente a  $\Gamma$  in  $P$ ) definita dall'equazione:

$$\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 \text{ cioè } \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0.$$

In particolare, in un punto semplice  $P$  di  $\Gamma$  passa una unica retta tangente a  $\Gamma$  in  $P$ . Per esteso, si ha:

$$\begin{aligned}0 = \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} &= (a_{00}p_0 + a_{01}p_1 + a_{02}p_2)X_0 + (a_{01}p_1 + a_{11}p_2 + a_{12}p_3)X_1 + \\ &(a_{02}p_1 + a_{12}p_2 + a_{22}p_3)X_2 = f_0(\mathbf{p})X_0 + f_1(\mathbf{p})X_1 + f_2(\mathbf{p})X_2\end{aligned}$$

Il primo punto fondamentale del sistema  $P_0[1, 0, 0]$  è semplice per  $\Gamma \Leftrightarrow$  la prima riga di  $\mathbf{A}$  non è identicamente nulla  $\Leftrightarrow$  la prima colonna di  $\mathbf{A}$  non è identicamente nulla  $\Leftrightarrow$  l'espressione di  $f$  è lineare nella variabile  $X_0$ . In tal caso, l'annullarsi del coefficiente di  $X_0$  definisce la retta tangente a  $\Gamma$  in  $P_0[1, 0, 0]$ . Vale analogo per il secondo e il terzo punto fondamentale.

**Definizione 7.2.17.** Un sottospazio  $\Sigma$  è tangente ad una quadrica  $\Gamma$  in un punto semplice  $P \in \Gamma$  se contiene  $P$  ed è contenuto nell'iperpiano tangente a  $\Gamma$  in  $P$ .

*Osservazione 7.2.18.* Un sottospazio  $\Sigma$  passante per un punto semplice  $P$  di una quadrica  $\Gamma$  può essere interamente contenuto in  $\Gamma$  o intersecarlo in una quadrica  $\Gamma_\Sigma$  di  $\Sigma$ . Se  $\Sigma$  è contenuto nell'iperpiano tangente a  $\Gamma$  in un suo punto semplice  $P$ , ogni retta di  $\Sigma$  passante per  $P$  interseca  $\Gamma_\Sigma$  unicamente in  $P$  con molteplicità 2, oppure è interamente contenuta in  $\Gamma_\Sigma$ : in particolare,  $P$  è un punto singolare per  $\Gamma_\Sigma$ . Più in generale, un sottospazio  $\Sigma$  è tangente a  $\Gamma$  in  $P$  se e solo se  $\Sigma \subset \Gamma$  oppure l'intersezione  $\Gamma_\Sigma$  ha un punto doppio in  $P$ .

*Osservazione 7.2.19.* Per  $n \geq 3$ , siano  $P$  un punto semplice di una quadrica  $\Gamma$  e  $H$  un iperpiano passante per  $P$ . L'iperpiano  $H$  è tangente a  $\Gamma$  in  $P$  se e solo se  $H \subset \Gamma$  (e, in tal caso,  $\Gamma$  è riducibile) oppure l'intersezione  $H \cap \Gamma = \Gamma_H$  è una quadrica su  $H$  con un punto doppio in  $P$ .

### 7.3 Polarità

Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}$  una quadrica, di equazione  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  in un riferimento  $\mathcal{R}$  fissato.

**Definizione 7.3.1.** Sia  $P = P[\mathbf{p}]$  un punto non singolare di  $\Gamma$ . L'*iperpiano polare* di  $P$  rispetto a  $\Gamma$  è l'iperpiano, denotato con  $\omega_P$ , di equazione:

$$\mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0. \quad (7.21)$$

La definizione di iperpiano polare è ben posta perchè  $\mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X}$  è identicamente nulla come funzione di  $\mathbf{X}$  se e solo se  $\mathbf{p}^t \mathbf{A} = 0$  e inoltre  $\omega_P$  non dipende dalla scelta del riferimento.

**Proposizione 7.3.2.** Siano  $P, P' \in \Gamma$  punti semplici di  $\Gamma$ . Valgono allora le seguenti proprietà:

- a) appartenenza:  $P \in \omega_{P'} \Leftrightarrow P' \in \omega_P$  e  $\omega_P$  è l'iperpiano tangente;
- b) reciprocità:  $P \in \omega_{P'} \Leftrightarrow P' \in \omega_P$ ;
- c) sezione:  $Z$  è un sottospazio e  $P \in \Gamma_Z \setminus \text{Sing}(\Gamma_Z) \Rightarrow \omega_P \not\subset Z$  (cioè  $Z$  non è tangente a  $\Gamma$  in  $P$ ) e  $\omega_P \cap Z$  è l'iperpiano polare di  $P$  rispetto a  $\Gamma_Z$ .

*Dimostrazione.* I primi due asserti sono immediati, e la loro dimostrazione è lasciata per esercizio.

c) E' possibile supporre che il riferimento sia scelto in modo tale che le equazioni di  $Z$  siano  $X_{h+1} = \dots = X_n = 0$ . Se  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  è l'equazione di  $\Gamma$  nel riferimento, la quadrica intersezione  $\Gamma_Z$  ha equazione  $f(X_0, \dots, X_h, 0, \dots, 0) = 0$  in  $Z$  e la matrice  $\mathbf{A}$  si scrive come matrice a blocchi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

con  $\mathbf{A}_1$  matrice quadrata di ordine  $h+1$ , di modo che  $\mathbf{A}_1$  risulta essere la matrice associata a  $\Gamma_Z$ :

$$f(X_0, \dots, X_h, 0, \dots, 0) = (X_0, \dots, X_h) \mathbf{A}_1 (X_0, \dots, X_h)^t = 0.$$

Il punto  $P$ , che appartiene a  $Z$ , ha coordinate della forma  $P(p_0, \dots, p_h, 0, \dots, 0)$  e l'equazione del suo iperpiano polare  $\omega_P$  è data da:

$$(p_0, \dots, p_h) (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) (X_0, \dots, X_h, X_{h+1}, \dots, X_n)^t = 0.$$

Nelle coordinate di  $Z$ , l'intersezione di  $\omega_P$  con  $Z$  ha dunque equazione:

$$(p_0, \dots, p_h) \mathbf{A}_1 (X_0, \dots, X_h) = 0$$

che è anche l'equazione dell'iperpiano polare di  $P$  rispetto a  $\Gamma_Z$ : infatti, tale equazione non è identicamente nulla, perchè altrimenti avremmo  $(p_0, \dots, p_h) \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$  e  $P$  sarebbe singolare per  $\Gamma_Z$ .  $\square$

Una quadrica  $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$  definisce, per quanto visto, una applicazione:

$$\omega_\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(\Gamma) & \rightarrow & \mathbb{P}^{n \vee} \\ P & \mapsto & \omega_P \end{array} \quad (7.23)$$

È facile mostrare la seguente:

**Proposizione 7.3.3.** Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$  una quadrica di equazione  $\mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  in un riferimento. Se  $\text{Sing}(\Gamma) = \emptyset$ , allora l'applicazione:

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma : \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^{n \vee} \\ P &\mapsto \omega_P \end{aligned} \quad (7.24)$$

è una proiettività, di matrice  $\mathbf{A}$ . In particolare,  $\omega_\Gamma$  manda sottospazi in sistemi lineari della stessa dimensione.

Per alcune proprietà di  $\omega_\Gamma$ , si rimanda agli Esercizi svolti 7.12-7.13.

Nel resto del paragrafo, studieremo con maggiori dettagli la polarità in una retta e nel piano.

### Polarità nella retta rispetto ad una quadrica

Nella retta proiettiva  $\mathbb{P}^1$  sia fissato un riferimento. Fissiamo una quadrica  $\Gamma$  non degenera  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}^1$ , composta da due punti distinti  $B_0$  e  $B_1$ . Denotiamo con  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  la matrice associata alla quadrica  $\Gamma$  nel riferimento fissato. Se  $P[p_0, p_1]$  è un punto di  $\mathbb{P}^1$ , l'equazione

$$(p_0, p_1) \mathbf{A} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = (p_0 a + p_1 b) X_0 + (p_0 b + p_1 c) X_1 = 0$$

definisce un iperpiano in  $\mathbb{P}^1$ , cioè il punto  $[p_0 b + p_1 c, -(p_0 a + p_1 b)]$ , denotato con

$$\omega_P \text{ o più semplicemente } P'$$

e detto *punto polare di P rispetto a  $\Gamma$* .

Cerchiamo ora il punto polare di  $\omega_P$ : esso è definito dall'equazione:

$$\begin{aligned} (p_0 b + p_1 c, -(p_0 a + p_1 b)) \mathbf{A} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = \\ \{a(p_0 b + p_1 c) - b(p_0 a + p_1 b)\} X_0 + \{b(p_0 b + p_1 c) - c(p_0 a + p_1 b)\} X_1 = \\ \{p_1(ac - b^2)\} X_0 + \{p_0(b^2 - ca)\} X_1 = (ac - b^2)\{p_1 X_0 - p_0 X_1\} = 0. \end{aligned}$$

Ricaviamo che il punto polare di  $\omega_P = P'$  è proprio il punto  $P$ . Diciamo che i punti  $P$  e  $\omega_P$  sono *tra loro coniugati rispetto a  $\Gamma$* , o che l'uno è il coniugato dell'altro.

**Definizione 7.3.4.** La proiettività:

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^{1 \vee} \\ P &\mapsto \omega_P = P' \end{aligned} \quad (7.25)$$

è detta la *polarità rispetto a  $\Gamma$* .

Per quanto visto, la proiettività  $\omega_\Gamma$  è una *involutione*, cioè  $\omega_\Gamma$  non è l'identità, ma  $\omega_\Gamma^2$  è l'identità; gli unici punti fissi per  $\omega_\Gamma$  sono i punti  $B_0, B_1$  di  $\Gamma$ . Se  $P \neq B_0, B_1$ , i punti  $P$  e  $P'$  si dicono *coniugati armonici* rispetto ad  $B_0$  e  $B_1$ , e la nomenclatura è giustificata dalla seguente:

**Proposizione 7.3.5.** Sia  $\Gamma = B_0 + B_1$  una quadrica non degenera in  $\mathbb{P}^1$ . Sia  $P$  un punto non appartenente a  $\Gamma$ , e sia  $P'$  il suo punto coniugato. La quaterna  $B_0, B_1, P, P'$  è armonica, cioè ha birapporto

$$(B_0 B_1 P P') = [1, -1].$$

*Dimostrazione.* Scegliendo opportunamente il riferimento, si può supporre che  $\Gamma$  sia composta dai punti fondamentali  $B_0 = P_0 = [1, 0]$  e  $B_1 = P_1 = [0, 1]$ . L'equazione della quadrica è dunque  $X_0 X_1 = 0$  e la matrice associata è  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Il coniugato  $P'$  del punto  $P = [1, p]$  ha equazione

$$(1, p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix} = pX_0 + X_1 = 0$$

e dunque  $P' = \omega_\Gamma(P)$  è il punto  $P' = [1, -p]$ .

Il birapporto  $(B_0 B_1 P P')$  è dato, per definizione, dalle coordinate omogenee del punto  $P'$  nell'unico riferimento proiettivo i cui punti fondamentali siano  $B_0$  ed  $B_1$ , e  $P$  sia il punto unità. Risulta:

$$(B_0 B_1 P P') = \left[ \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & -p \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & -p \end{array} \right] \right] = [p, -p] = [1, -1].$$

□

*Osservazione 7.3.6.* Se  $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$  è una quadrica proiettiva non degenera, e  $P$  un punto su una retta  $r$  non contenuta in  $\Gamma$ , allora  $P' = \omega_P \cap r$  è il punto polare di  $P$  rispetto alla quadrica intersezione  $r \cap \Gamma$ .

*Osservazione 7.3.7. Involuzione su un fascio di rette indotta dalla polarità su una retta* Nel piano proiettivo, siano assegnate una retta  $r$  ed una quadrica  $\Gamma$  non degenera su  $r$ . Ad ogni punto  $P$  di  $r$  resta dunque associato il punto coniugato  $P'$  di  $P$  rispetto a  $\gamma$ .

Sia ora  $Q \in \mathbb{P}^2$  un punto non appartenente a  $r$ . La polarità su  $r$  induce una involuzione nel fascio di rette per  $Q$ , grazie alla seguente regola: ad ogni retta  $s$  per  $Q$  si associa la retta  $s'$  passante per  $Q$  e per il punto  $P' \in r$  coniugato di  $P = s \cap r$ . La retta  $s'$  è detta *retta coniugata* della retta  $s$  e il punto  $P'$  è detto *coniugato* di  $s$ . Se  $r$  è la retta impropria  $\pi_\infty$ , diciamo che il punto  $P'$  è la *direzione coniugata della retta s*.

Per l'osservazione precedente, data una conica non degenera  $\Gamma$  nel piano, e dati una retta  $r$  non tangente a  $\Gamma$  e un punto  $Q$  esterno a  $r$ , allora nel fascio di rette per  $Q$  resta individuata una involuzione (indotta dalla polarità su  $r$  relativa alla quadrica intersezione  $r \cap \Gamma$ ).

*Esempio 7.3.8. Polarità sulla retta rispetto ad una quadrica degenera* Una quadrica degenera  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}^1$  è composta da un punto  $A$  contato con molteplicità 2:  $\Gamma = 2A$ . In particolare,  $A$  coincide con il luogo singolare di  $\Gamma$  e la polarità rispetto a  $\Gamma$  è l'applicazione costante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \setminus \{A\} & \rightarrow & A \\ P & \mapsto & A. \end{array}$$

### Polarità rispetto ad una conica

Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  una quadrica, di equazione  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  in un riferimento  $\mathcal{R}$ .

**Definizione 7.3.9.** Sia  $P = P[\mathbf{p}]$  un punto non singolare di  $\Gamma$ . La *retta polare* di  $P$  rispetto a  $\Gamma$  è una retta, denotata con  $r_P$  o con  $\omega_P$ , di equazione:

$$\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X}) = 0 \quad \text{cioè} \quad \mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0. \quad (7.26)$$

Diciamo, inoltre, che il punto  $P$  è il *polo* della retta  $\omega_P$ .

Si osservi che la definizione di retta polare è ben posta perchè  $\Omega_f(\mathbf{p}, \mathbf{X})$  è identicamente nulla come funzione di  $\mathbf{X}$  se e solo se  $\mathbf{p}^t \mathbf{A} = 0$  e inoltre  $\omega_P$  non dipende dalla scelta del riferimento.

La seguente proposizione è di facile dimostrazione:

**Proposizione 7.3.10.** *Siano  $P, P' \in \mathbb{P}^2$  punti che non siano punti doppi di una conica  $\Gamma$ . Valgono allora le seguenti proprietà:*

- a) appartenenza:  $P \in \omega_P \Leftrightarrow P \in \Gamma$  e  $\omega_P$  è la retta tangente;
- b) reciprocità:  $P \in \omega_{P'} \Leftrightarrow P' \in \omega_P$ .
- c) sezione: sia  $r$  una retta che interseca  $\Gamma$  in due punti distinti. Se  $P \in r$  e  $P \notin \Gamma$ , allora  $\omega_P \neq r$  e  $\omega_P \cap r$  è il punto coniugato di  $P$  rispetto a  $\Gamma_r = \Gamma \cap r$ .

**Definizione 7.3.11.** Una conica  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  definisce una applicazione:

$$\omega_\Gamma : \begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \setminus \text{Sing}(\Gamma) \\ P \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{P}^{2\vee} \\ \mapsto \omega_P \end{array} \quad (7.27)$$

detta *polarità rispetto alla conica  $\Gamma$* .

**Proposizione 7.3.12.** *Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  una conica di equazione  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$  in un riferimento. Se  $\text{Sing}(\Gamma) = \emptyset$ , allora l'applicazione:*

$$\omega_\Gamma : \begin{array}{c} \mathbb{P}^2 \\ P \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{P}^{2\vee} \\ \mapsto \omega_P \end{array} \quad (7.28)$$

è una proiettività (di matrice  $\mathbf{A}$ ). In particolare, ogni retta  $r$  di  $\mathbb{P}^2$  è la polare di un punto, che viene detto il suo polo. Inoltre, l'immagine di una retta  $r$  di  $\mathbb{P}^2$  tramite  $\omega_\Gamma$  è una retta in  $\mathbb{P}^{2\vee}$  (che può essere interpretata come un fascio di rette passante per il polo di  $r$ ).

*Esempio 7.3.13.* Sia  $\Gamma$  la conica di equazione  $2X_2X_0 + 4X_0X_1 + X_1^2 = 0$  e sia  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice ad essa associata. Poichè  $\mathbf{A}$  ha determinante non nullo, la conica è non degenera e tutti i suoi punti sono lisci. La polare del punto  $P[p_0, p_1, p_2]$  è la retta  $\omega_P$  di equazione  $(2p_1 + p_2)X_0 + (2p_0 + p_1)X_1 + p_0X_2 = 0$ . Ad esempio, la polare di  $P[2, 0, 1]$  ha equazione  $X_0 + 4X_1 + 2X_2 = 0$ , mentre la polare di  $P_1[1, 0, 0]$  è  $2X_1 + X_2 = 0$ . Il polo della retta  $r$  di equazione  $u_0X_0 + u_1X_1 + u_2X_2 = 0$  è il punto  $P[p_0, p_1, p_2]$  tale che

$$(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A} = \rho(u_0, u_1, u_2), \quad \exists \rho \neq 0,$$

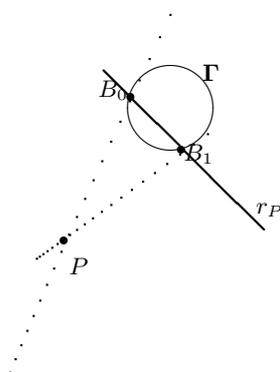
o, equivalentemente,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Ad esempio, il polo della retta  $3X_0 - X_2 = 0$  è il punto le cui coordinate soddisfano il sistema  $2p_1 + p_2 = 3, 2p_0 + 2p_1 = 0, p_2 = -1$ , cioè il punto  $[-2, 2, -1]$ .

Si osservi che, per determinare il polo di una retta  $r$ , è sufficiente intersecare le polari di due punti distinti di  $r$ .

*Osservazione 7.3.14. Interpretazione geometrica della retta polare* La Proposizione 7.3.10 permette di interpretare geometricamente la retta polare. Sia  $\Gamma$  una conica non degenere e sia  $r_P$  la retta polare del punto  $P$  rispetto alla conica  $\Gamma$ . Se  $P \in \Gamma$ , la retta  $\omega_P$  è la tangente a  $\Gamma$  in  $P$ . Se invece  $P \notin \Gamma$ , la retta  $\omega_P$  non può essere tangente a  $\Gamma$  (altrimenti avrebbe come polo un punto di  $\Gamma$ ) e dunque interseca  $\Gamma$  in due punti distinti  $B_0$  e  $B_1$ . La polare  $r_0$  di  $B_0$  passa per  $P$ , come anche la polare  $r_1$  di  $B_1$ : dunque  $r_0$  e  $r_1$  sono rette del fascio di centro  $P$  che sono tangenti a  $\Gamma$ . Si verifica facilmente che esse sono le uniche rette del fascio di centro  $P$  con tale proprietà. (vedi figura 7.1) Per una generalizzazione in dimensione superiore, vedi il Problema 7.13 .



**Figura 7.1.** Retta polare

*Osservazione 7.3.15. Involuzione indotta dalla conica su un fascio di rette* Se la conica  $\Gamma$  è non degenere, siano  $P \notin \Gamma$  un punto non appartenente alla conica e  $\omega_P$  la sua retta polare. Ricordando l'Osservazione 7.3.7, la polarità su  $\omega_P$  definita da  $\Gamma \cap \omega_P$  definisce una involuzione sul fascio di rette di centro  $P$ . Per le proprietà della polarità, tale involuzione muta una retta  $r$  per  $P$  nella retta polare  $\omega_Q$  del punto  $Q = r \cap \Omega_P$ . In particolare, le rette per  $P$  tangenti a  $\Gamma$  sono fisse per tale involuzione.

*Osservazione 7.3.16.* L'insieme delle rette tangenti ad una conica  $\Gamma$  individua una conica in  $\mathbb{P}^{2V}$ , detta *conica duale*.

## Esercizi svolti

### Quadriche della retta

**Problema 7.1.** In  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , determinare la matrice associata e i punti di ciascuna delle quadriche definite dalle seguenti equazioni:

- a)  $\Gamma_1 : 6X_0^2 - 13X_0X_1 - 5X_1^2 = 0$ ,  
 b)  $\Gamma_2 : -3X_0^2 + (6 + 2i)X_0X_1 + (2i - 1)X_1^2 = 0$ ,  
 c)  $\Gamma_3 : 4X_0^2 - 12X_0X_1 + 9X_1^2 = 0$

*Soluzione.* a) La matrice associata a  $\Gamma_1$  è  $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{13}{2} \\ -\frac{13}{2} & -5 \end{pmatrix}$ , che ha determinante non nullo. Dunque  $\Gamma_1$  è costituita da due punti distinti  $B_0$  e  $B_1$ . Fattorizzando l'equazione della quadrica tramite la formula risolutiva per le equazioni quadratiche, si trova che  $B_0[5, 2]$  e  $B_1[-1, 3]$ .

b) La matrice associata a  $\Gamma_2$  è  $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3+i \\ 3+i & 2i-1 \end{pmatrix}$ , che ha determinante non nullo. Dunque  $\Gamma_2$  è costituita da due punti distinti  $C_0$  e  $C_1$ . Fattorizzando l'equazione della quadrica tramite la formula risolutiva per le equazioni quadratiche, si trova che  $C_0[i, -3]$  e  $C_1[2+i, 1]$ .

c) La matrice associata a  $\Gamma_3$  è  $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ , che ha determinante nullo. Dunque  $\Gamma_3$  è costituito da un unico punto  $B$ , con molteplicità 2. Fattorizzando l'equazione della quadrica, si trova che  $B[3, 2]$ .  $\square$

### Matrice, punti doppi e componenti di una conica

Nel piano proiettivo complesso, sia fissato un sistema di coordinate omogenee  $[X_0, X_1, X_2]$ . I cambi di riferimento permessi sono tutti e soli i cambi di riferimenti proiettivi.

**Problema 7.2.** Sia  $\Gamma$  la conica di equazione:  $2X_0^2 - 2X_0X_1 + 9X_0X_2 - X_2X_2 + 4X_2^2 = 0$ .

- a) Determinare la matrice associata a  $\Gamma$ .  
 b) Determinare il rango e i punti doppi di  $\Gamma$ .  
 c) Determinare le componenti di  $\Gamma$ .

*Soluzione.* a) La matrice associata alla conica è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 9/2 \\ -1 & 0 & -(1/2) \\ 9/2 & -(1/2) & 4 \end{pmatrix} \text{ o equivalentemente } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice si ottiene inserendo come elemento  $a_{00}$  il coefficiente di  $X_0^2$ , come elemento  $a_{11}$  il coefficiente di  $X_1^2$ , come elemento  $a_{22}$  il coefficiente di  $X_2^2$ ; l'elemento  $a_{01}$  è la metà del coefficiente di  $X_0X_1$ , l'elemento  $a_{02}$  è la metà del coefficiente di  $X_0X_2$ , l'elemento  $a_{12}$  è la metà del coefficiente di  $X_1X_2$ . La matrice viene completata in modo che risulti simmetrica: si pongono  $a_{10} = a_{01}$ ,  $a_{20} = a_{02}$ ,  $a_{21} = a_{12}$ .

b) Il rango della matrice  $\mathbf{A}$  è 2. Dunque  $\Gamma$  ha un unico punto doppio le cui coordinate sono date da una soluzione non nulla del sistema omogeneo  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ . Si ricava che il punto singolare è  $Q[1, -7, -2]$ . c) Poichè il rango è 2, la conica  $\Gamma$  è composta da due rette, che sicuramente devono passare entrambe per il punto doppio  $Q$ . Intersecando  $\Gamma$  con la retta  $X_0 = 0$ , che non passa per  $Q$ , si ottengono i due punti  $P_2[0, 1, 0]$  e  $B[0, 4, 1]$ . Le componenti di  $\Gamma$  sono la retta per  $Q$  e  $P_2$  e la retta per  $Q$  e  $B$ , le cui equazioni sono, rispettivamente:

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2X_0 - X_2 = 0, \det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & -7 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = X_0 - X_1 + 4X_2 = 0,$$

cioè  $2X_0 + X_2 = 0$  e  $X_0 - X_1 + 4X_2 = 0$ .

**Problema 7.3.** Sia  $\Gamma$  la conica di equazione:

$$X_0^2 + 9X_1^2 + 4X_2^2 + 6X_0X_1 - 4X_1X_2 - 12X_1X_2 = 0.$$

- Determina la matrice associata a  $\Gamma$ .
- Determina il rango e i punti doppi di  $\Gamma$ .
- Determina le componenti di  $\Gamma$ .

*Soluzione.* a) La matrice associata alla conica è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Il rango della matrice  $\mathbf{A}$  è 1. Dunque i punti doppi di  $\Gamma$  formano una retta. I punti doppi sono tutti e soli quelli le cui coordinate sono soluzione non nulla del sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ . Poichè il rango di  $\mathbf{A}$  è 1, il sistema  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$  è equivalente all'equazione data dalla prima riga della matrice  $X_0 + 3X_1 - 2X_2 = 0$ : questa è dunque l'equazione della retta doppia.

c) Poichè il rango è 1, la conica  $\Gamma$  è composta da una unica retta contata con molteplicità due. Tale retta è esattamente la retta doppia, di equazione

$$X_0 + 3X_1 - 2X_2 = 0.$$

□

**Problema 7.4. Intersezione tra retta e conica** Sia  $\Gamma$  la conica di equazione:  $2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1X_2 = 0$ .

- Determina il rango e i punti doppi di  $\Gamma$ .
- Determina l'intersezione tra la conica  $\Gamma$  e ciascuna delle rette  $r : X_1 = 0$ ,  $s : X_0 - X_1 - X_2 = 0$ ,  $t : X_0 + 2X_2 = 0$ , studiando la molteplicità di intersezione in ogni punto.

*Soluzione.* a) La matrice associata alla conica è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

che ha rango 3; pertanto  $\Gamma$  non ha punti doppi.

b) L'intersezione tra  $\Gamma$  e  $r$  è descritta dal sistema

$$\begin{cases} 2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1X_2 = 0, \\ X_1 = 0 \end{cases},$$

cioè  $X_1 = 0$ ,  $2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_2 = 0$ . Fattorizzando il polinomio

$$2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_2 = 2\left(X_0 + \frac{1+i}{2}X_2\right)\left(X_0 + \frac{1-i}{2}X_2\right)$$

tramite la formula risolutiva per le equazioni quadratiche, si conclude che  $\Gamma$  e la retta  $r$  si intersecano nei punti  $R_1[\frac{1+i}{2}, 0, -1]$  e  $R_2[\frac{1-i}{2}, 0, -1]$ ; la molteplicità di intersezione di ciascuno di tali punti è necessariamente 1.

L'intersezione tra  $\Gamma$  e  $s$  è descritta dal sistema  $2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1X_2 = 0$ ,  $X_2 = X_0 - X_1$ , cioè

$$\begin{cases} X_2 = X_0 - X_1 \\ 2X_0^2 + (X_0 - X_1)^2 + 2X_0X_1 + 2X_0(X_0 - X_1) + 4X_1(X_0 - X_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = X_0 - X_1 \\ 2X_1^2 + X_0^2 + X_1^2 - 2X_0X_1 + 2X_0X_1 + 2X_0^2 - 2X_0X_1 + 4X_0X_1 - 4X_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = X_0 - X_1 \\ 5X_0^2 - 3X_1^2 + 2X_0X_1 = 0 \end{cases}.$$

Fattorizzando il polinomio

$$5X_0^2 + 2X_0X_1 - 3X_1^2 = 5\left(X_0 - \frac{3}{5}X_1\right)(X_0 + X_1)$$

tramite la formula risolutiva per le equazioni quadratiche, si conclude che  $\Gamma$  e la retta  $s$  si intersecano nei punti  $S_1[3, 5, -2]$  e  $S_2[1, -1, 2]$ ; la molteplicità di intersezione di ciascuno di tali punti è necessariamente 1.

L'intersezione tra  $\Gamma$  e  $t$  è descritta dal sistema  $2X_0^2 + X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1X_2 = 0$ ,  $X_0 = -2X_2$ , cioè  $2(-2X_2)^2 + X_2^2 + 2(-2X_2)X_1 + 2(-2X_2)X_2 + 4X_1X_2 = 0$ ,  $X_0 = -2X_2$ , cioè  $5X_2^2 = 0$ ,  $X_0 = -2X_2$ . Si conclude che  $\Gamma$  e la retta  $t$  si intersecano nei punti  $P_2[0, 1, 0]$ ; la molteplicità di intersezione tra la conica e la retta  $t$  nel punto  $P_2$  è uguale a 2.

### Polarità rispetto alla quadrica in una retta

**Problema 7.5.** Sia  $\Gamma$  la quadrica di  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  di equazione:  $-35X_0^2 + 3X_0X_1 + 2X_1^2 = 0$ . Determina le equazioni della proiettività  $\varphi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  definita dalla polarità relativa a  $\Gamma$ . Determina, in particolare, i punti fissi di  $\varphi$ .

*Soluzione.* Una matrice associata a  $\Gamma$  è  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -70 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , che ha rango 2. Dunque  $\Gamma$  è costituita da due punti distinti. Il punto polare di  $P[p_0, p_1]$  è definito dall'equazione  $\mathbf{p}^t \mathbf{A} \mathbf{X} = 0$ , cioè dal sistema

$$(-70p_0 + 3p_1)X_0 + (3p_0 + 4p_1)X_1 = 0,$$

ed è dunque il punto  $P'[3p_0 + 4p_1, 70p_0 - 3p_1]$ . La proiettività cercata  $\varphi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  è dunque data da  $P[p_0, p_1] \mapsto \varphi(P) = P'[p'_0, p'_1]$  ove:

$$\begin{aligned} p'_0 &= 3p_0 + 4p_1 \\ p'_1 &= 70p_0 - 3p_1 \end{aligned}$$

che costituiscono le equazioni della proiettività. I punti fissi di  $\varphi$  sono esattamente i punti di  $\Gamma$ , cioè  $B_1[2, 7]$  e  $B_2[1, -5]$ .

### Polarità associata ad una conica

**Problema 7.6.** Sia  $\Gamma$  la conica di equazione:  $X_1^2 - X_2^2 + 2X_0X_1 + 2X_0X_2 + 4X_1X_2 = 0$ .

a) Determina la tangente a  $\Gamma$  nel suo punto  $P[1, 0, 2]$ .

b) Determina le tangenti a  $\Gamma$  uscenti dal punto  $Q[3, -1, 1]$ .

*Soluzione.* a) La conica  $\Gamma$  ha matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , che ha rango 3. Dunque la

conica non ha punti doppi. Il punto  $P$  appartiene alla conica  $\Gamma$  perchè soddisfa la sua equazione. La tangente a  $P$  in  $\Gamma$  è dunque la polare di  $P$  rispetto alla conica  $\Gamma$ , di equazione

$$(1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_0 + 3X_1 - X_2 = 0.$$

b) La polare di  $Q$  ha equazione  $(3 \ -1 \ 1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 4X_1 = 0$ , la cui intersezione con  $\Gamma$  è definita da  $X_1 = 0, -X_2^2 + 2X_0X_2 = X_2(2X_0 - X_2) = 0$ . I punti di intersezione sono  $C_1[1, 0, 0]$  e  $C_2[1, 0, 2]$ . Le tangenti a  $\Gamma$  uscenti da  $Q$  sono la retta  $r_1$  per  $Q$  e  $C_1$  e la retta  $r_2$  per  $Q$  e  $C_2$ , di equazione, rispettivamente:

$$\begin{aligned} r_1 : \det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= X_1 + X_2 = 0 \\ r_2 : \det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} &= -2X_0 - 5X_1 + X_2 = 0. \end{aligned}$$

□

**Problema 7.7.** Sia  $\Gamma$  la conica di equazione:  $X_0^2 + 4X_0X_1 + 2X_1X_2 = 0$ .

a) Determina la polare del punto  $Q[2, 1, -3]$  rispetto a  $\Gamma$

b) Determina il polo della retta  $s$  di equazione  $-6X_0 + X_1 - 3X_2 = 0$ .

c) Determina l'equazione della involuzione indotta per polarità da  $\Gamma$  sulla retta  $r$  di equazione  $X_0 + 3X_1 - 2X_2 = 0$ .

*Soluzione.* La conica  $\Gamma$  ha matrice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , che ha rango 3. Dunque la conica

non ha punti doppi.

a) La polare del punto  $Q$  rispetto a  $\Gamma$  è la retta di equazione

$$(2 \ 1 \ -3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 4X_0 + X_1 + X_2 = 0.$$

b) **Primo modo** Il polo di  $s$  è il punto  $S(s_0, s_1, s_2)$  tale che  $(s_0 \ s_1 \ s_2)\mathbf{A} = (-6 \ 1 \ -3)$ . Interpretando tale condizione come un sistema lineare nelle incognite  $s_0, s_1$  e  $s_2$ , si ricava che il polo di  $s$  è il punto  $S[0, -3, 1]$ .

**Secondo modo** Considero due punti distinti  $B_1[1, 0, -2]$  e  $B_2[0, 3, 1]$  su  $s$ . Per la proprietà di reciprocità, il polo  $S$  di  $s$  è l'intersezione delle polari di  $B_1$  e  $B_2$ :

$$S : \begin{cases} (1 \ 0 \ -2)\mathbf{A}\mathbf{X} = X_0 = 0 \\ (0 \ 3 \ 1)\mathbf{A}\mathbf{X} = 6X_0 + X_1 + 3X_2 = 0 \end{cases}$$

Il polo di  $s$  è dunque il punto  $S[0, -3, 1]$ .

c) Si parametrizzi la retta  $r$  tramite le coordinate  $Y_1$  e  $Y_2$ , corrispondenti al punto  $P[-3Y_1 + 2Y_2, Y_1, Y_2] \in r$ . Per definizione, il punto coniugato  $P'$  di  $P$  per la polarità indotta da  $\Gamma$  su  $r$  è il punto  $P'$  ottenuto intersecando  $r$  con la polare  $r_P$  di  $P$  rispetto a  $\Gamma$ . La polare di  $r_P$  di  $P$  ha equazione

$$r_P : (-3Y_1 + 2Y_2 \ Y_1 \ Y_2)\mathbf{A}\mathbf{X} = (-Y_1 + 2Y_2)X_0 + (-3Y_1 + 3Y_2)X_1 + Y_1X_2 = 0$$

Dunque  $P' = [3Y_1 - 6Y_2, -Y_1 + 4Y_2, -6Y_1 + 9Y_2]$ . Posto  $[Y'_1, Y'_2]$  le coordinate di  $P'$  sulla retta  $r$ , le equazioni cercate sono  $Y'_1 = -Y_1 + 4Y_2, Y'_2 = -6Y_1 + 9Y_2$ .

**Problema 7.8.** *Mostra che, se  $\Gamma$  è una conica di rango 1 e  $P$  un punto non appartenente a  $\Gamma$ , la polare di  $P$  è la retta che è componente di  $\Gamma$ .*

*Soluzione.* Osservando che la polare di  $P$  è una retta che deve contenere tutti i punti doppi di  $\Gamma$ , si conclude.

Se si vuole utilizzare una dimostrazione che non ricorra alla nozione di punto doppio, si può procedere come segue.

La conica  $\Gamma$  è composta da una retta con molteplicità 2. Sia  $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$  una equazione che rappresenta  $\Gamma$ . Poichè  $\mathbf{A}$  ha rango 1 per ipotesi, esistono due vettori non nulli  $(\rho_0, \rho_1, \rho_2)$  e  $(b_0, b_1, b_2)$  tali che

$$\mathbf{A} = (\rho_0, \rho_1, \rho_2)^t(b_0, b_1, b_2).$$

Con tali notazioni, la componente di  $\Gamma$  ha equazione  $b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0$ . La polare di un punto  $P[p_0, p_1, p_2]$  ha equazione  $(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ ; poichè tutti i punti di  $\Gamma$  sono doppi, la condizione che  $P$  non appartenga a  $\Gamma$  è equivalente alla condizione che il prodotto  $(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A} = (\rho_0p_0 + \rho_1p_1 + \rho_2p_2)(b_0, b_1, b_2)$  non sia il vettore nullo, cioè che il fattore  $(\rho_0p_0 + \rho_1p_1 + \rho_2p_2)$  sia non nullo. Dunque, per ogni  $P \notin \Gamma$ , l'equazione  $(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$  è equivalente alla  $b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0$ , e la tesi è vera.

**Problema 7.9.** *Mostra che, se  $\Gamma$  è una conica di rango 2 e  $P$  un punto distinto dal punto doppio di  $\Gamma$ , la polare di  $P$  passa per il punto doppio  $Q$  di  $\Gamma$ . Inoltre, se  $P \in \Gamma$  è un punto semplice, la sua polare è la componente di  $\Gamma$  che lo contiene.*

*Soluzione.* La conica  $\Gamma$  è composta da due rette distinte. Se  $\mathbf{X}^t\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$  è una equazione che rappresenta  $\Gamma$ , la polare di un punto  $P[p_0, p_1, p_2] \neq Q$  ha equazione  $(p_0, p_1, p_2)\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$ ; il punto doppio  $Q$  risulta appartenere a tale polare; infatti, se  $[q_0, q_1, q_2]$  sono le coordinate del punto doppio, il prodotto  $\mathbf{A}(q_0, q_1, q_2)^t$  è il vettore nullo e  $(q_0, q_1, q_2)$  soddisfano l'equazione della polare di  $P$ .

Se inoltre  $P \in \Gamma$ , la polare di  $P$  contiene il punto  $P$  e il punto doppio  $Q$ : la polare coincide dunque con la componente di  $\Gamma$  contenente  $P$ .

**Coniche con condizioni assegnate**

**Problema 7.10.** *Si considerino fissati i punti  $B_1[1, 0, 0]$ ,  $B_2[0, 1, 0]$ ,  $B_3[0, 0, 1]$ ,  $B_4[1, 1, 1]$ ,  $B_5[2, -1, -1]$ . Determina, se esiste una conica  $\Gamma$  passante per i cinque punti.*

*Soluzione.* La conica  $\Gamma$ , se esiste, ha matrice della forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Il passaggio per  $B_1, B_2, B_3$  comporta, rispettivamente, che  $a_{00} = 0$ ,  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} = 0$ . Il passaggio per  $B_4$  impone che

$$a_{01} + a_{02} + a_{01} + a_{12} + a_{02} + a_{12} = 2(a_{01} + a_{02} + a_{12}) = 0.$$

Il passaggio per  $B_5$  comporta invece che  $-a_{01} - a_{02} + 2a_{01} - a_{12} + 2a_{02} - a_{12} = a_{01} + a_{02} - 2a_{12} = 0$ . Dunque,  $a_{12} = 0$  e  $a_{01} = -a_{02}$ . Dunque, è possibile scegliere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ in particolare, esiste una unica conica che soddisfa le richieste.}$$

□

**Problema 7.11.** *Determina l'equazione di una conica non singolare  $\Gamma$  tangente nel punto  $P[2, -1, 1]$  alla retta di equazione  $X_0 + X_1 - X_2 = 0$ .*

*Soluzione.* La conica cercata  $\Gamma$  ha matrice non singolare  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$  tale che

$$(2 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ e } (2 \ -1 \ 1) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \rho(1 \ 1 \ -1);$$

tali condizioni impongono, rispettivamente, il passaggio per  $P$  e che la retta assegnata sia la polare di  $P$ . Poichè  $P$  appartiene alla polare assegnata, la seconda condizione implica la prima. È dunque sufficiente trovare un valore per  $\rho$  e una matrice  $\mathbf{A}$  i cui coefficienti risolvano il sistema lineare dato dalla seconda condizione; il sistema è:

$$2a_{00} - a_{01} + a_{02} = \rho, \quad 2a_{01} - a_{11} + a_{12} = \rho, \quad 2a_{02} - a_{12} + a_{22} = -\rho$$

Una possibile soluzione è data, ad esempio, da  $\rho = 1$  e  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (che è non singolare); la conica  $\Gamma$  ha equazione:  $X_0^2 - 2X_1^2 - 2X_2^2 = 0$ .

**Ancora polarità**

**Problema 7.12.** *Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  una quadrica non degenera e  $\omega : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^{2\vee}$  la polarità ad essa associata. Mostra che l'immagine di una retta  $r$  è il fascio di centro il polo di  $r$ .*

*Soluzione.* Per la proprietà di reciprocità, la polare di ogni punto  $P$  di  $r$  deve contenere il polo di  $r$ .

**Problema 7.13.** Sia  $\Gamma \subset \mathbb{P}^3$  una quadrica non degenera e  $\omega : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3v}$  la polarità ad essa associata. Mostra che l'immagine di una retta  $r$  è il fascio di piani di centro una retta  $r'$ , e risulta indotta una corrispondenza  $r \mapsto r'$  tra le rette, detta polarità tra rette. Mostra, inoltre, che valgono le seguenti proprietà:

- una retta  $r$  coincide con la propria polare se e solo se  $r$  è contenuta in  $\Gamma$ .
- se due rette distinte reciprocamente polari  $r$  ed  $r'$  si intersecano in un punto  $P_0$ , allora  $P_0$  appartiene a  $\Gamma$  e  $r$  ed  $r'$  sono ivi tangenti.
- se una retta  $r$  è tangente a  $\Gamma$  in  $P$ , allora anche la polare  $r'$  è tangente a  $\Gamma$  in  $P$ . In particolare, per ogni punto  $P$  semplice di  $\Gamma$ , la polarità tra rette induce una involuzione tra le rette per  $P$  contenute in  $\omega_P$ , detta involuzione delle tangenti coniugate.

*Soluzione.* La retta  $r'$  è l'intersezione dei piani polari  $\omega_P$ , al variare di  $P \in r$ . Per dimostrare la proprietà a), basta osservare che se  $r = r'$  allora  $P \in \omega_P$  per ogni  $P \in r$ , e dunque  $P \in \Gamma$  per la proprietà di appartenenza. Il viceversa è analogo.

b) Il punto  $P_0$  appartiene alla sua polare, e dunque  $P_0 \in \Gamma$ . Inoltre, il piano  $\omega = r \vee r'$  è tangente a  $\Gamma$  in  $P$ .

c) Se  $R \in r \subset \omega_P$  è un punto distinto da  $P$ , l'iperpiano polare  $\omega_R$  di  $R$  passa per  $P$  e la polare di  $r$  è l'intersezione tra  $\omega_P$  e  $\omega_R$ , per la proprietà della sezione.