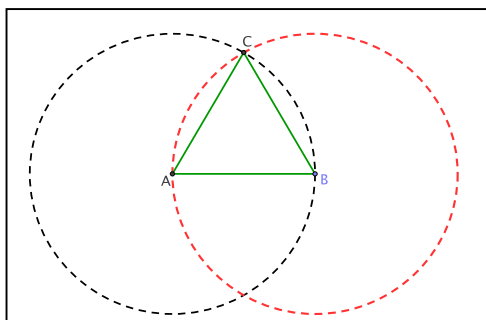


Le proposizioni del Primo Libro degli Elementi di Euclide

Per facilitare la lettura delle proposizioni, apporteremo alcune variazioni al testo, cercando però di salvarne lo spirito. Queste note vanno intese come tramite verso la lettura del testo euclideo, e non si sostituiscono ad esso.

Proposizione I.1



Fissato un segmento, è possibile costruire un triangolo equilatero di cui quel segmento è un lato.

Dimostrazione Sia AB il segmento assegnato. È richiesto di costruire un triangolo equilatero sul segmento AB.

Tracciamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3].

Poi tracciamo la circonferenza di centro B e raggio BA [assioma 3].

Scegliamo un punto D in cui i cerchi si intersecano [questo passaggio non è lecito senza un'ulteriore assioma: è l'assioma 6]

Tracciamo un segmento congiungente A e C e uno congiungente B e C [assioma 1].

Ora poiché B e C appartengono alla stessa circonferenza di centro A, AC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]

Analogamente, poiché A e C appartengono alla stessa circonferenza di centro B, BC è uguale ad AB. [definizione di circonferenza e centro]

Poiché cose che sono uguali alla stessa cosa sono uguali tra di loro, allora AC è anche uguale a BC. [nozioni comuni]

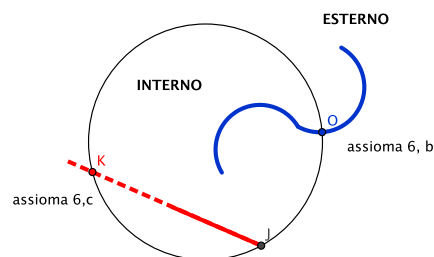
Quindi i tre segmenti AB, AC e BC sono uguali tra loro. Il triangolo ABC è quindi equilatero (avendo i tre lati uguali), e ha per lato AB. QED

Ecco l'assioma che assicura che le due circonferenze nella dim. della Prop. 1 si intersechino:

Assioma 6: a) un cerchio (rispettivamente, un triangolo) separa i punti del piano che non sono contenuti in esso in due regioni, che vengono chiamate **interno** ed **esterno**.

b) Ogni linea tracciata da un punto esterno ad un punto interno interseca il cerchio (risp., il triangolo)

c) Ogni segmento tracciato da un punto sul cerchio (o su un triangolo) ad un punto interno, incontrerà, se prolungato indefinitamente, il cerchio (risp., il triangolo) esattamente in un altro punto



Proposizione I.2

Dati un segmento e un punto, costruire un segmento che uguale al segmento assegnato e che abbia per estremo il punto dato.

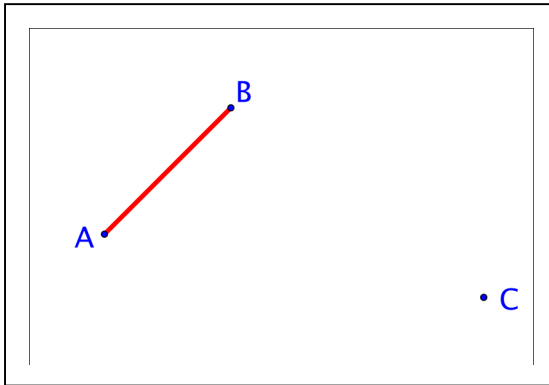
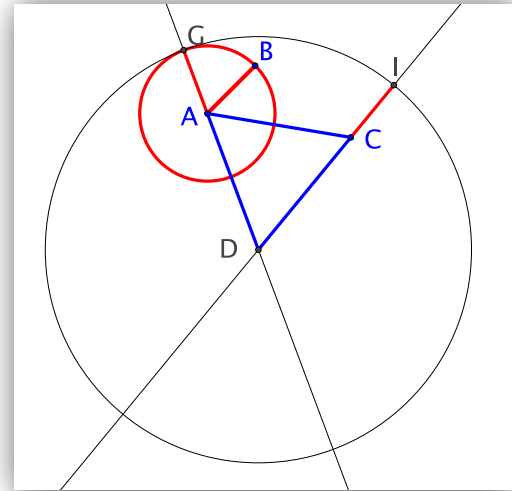


Figura iniziale



Costruzione

Siano AB il segmento e C il punto assegnati. È richiesto di costruire a partire dal punto C un segmento uguale a AB.

Disegniamo il segmento AC [assioma 1]

Disegniamo un triangolo equilatero di lato AC [in blu, prop. 1] e chiamiamo D il vertice diverso da A e C.

Disegniamo la circonferenza di centro A e raggio AB [assioma 3]

Prolunghiamo DA (a partire da A) [assioma 2] fino ad incontrare in G la circonferenza (rossa) di centro A e raggio AB [assioma 6]

Siccome il punto A è il centro del cerchio, AB è uguale a AG [definizione di cerchio].

Disegniamo la circonferenza di centro D e raggio DG [assioma 3]

Prolunghiamo DC (a partire da C) [assioma 2] fino ad incontrare in I la circonferenza (nera) di centro D e raggio DG [assioma 6]

Siccome D è il centro del cerchio, DG è uguale a DI [definizione di cerchio]. Inoltre DA è uguale a DC [perché lati del triangolo ADC che è equilatero per costruzione].

Poiché $DG (= DA+AG) = DI = (DC+CI)$, per le nozioni comuni anche la parte restante AG risulta uguale a CI. Dunque, CI è uguale a AG, che a sua volta è uguale a AB. Per le nozioni comuni, segue che CI è uguale a AB. QED

Si osservi che il postulato 3 fornisce la possibilità di utilizzare il compasso per disegnare una circonferenza, ma la sua formulazione non permette di utilizzarlo per misurare la lunghezza di un segmento: l'assioma non assicura di poter mantenere l'apertura del compasso quando lo si solleva dal foglio. Tale possibilità viene però garantita attraverso le proposizioni 2 e 3.

Per comodità di lettura, raccogliamo altri assiomi da aggiungere a quelli iniziali di Euclide. Questi assiomi sono solo una parte di quelli veramente necessari.

Assioma 7

a) Una retta (che si estende in modo indefinito in entrambe le direzioni) separa i punti del piano non appartenenti ad essa in due regioni dette **semipiani**.

b) Ogni linea, tracciata da un punto in un semipiano in un punto nell'altro semipiano, incontra la retta.

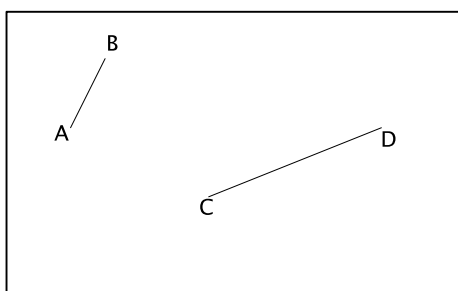
Assioma 8 (LAL: Lato-Angolo-Lato) (sostituisce la Proposizione I.4)

Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, allora sono congruenti.

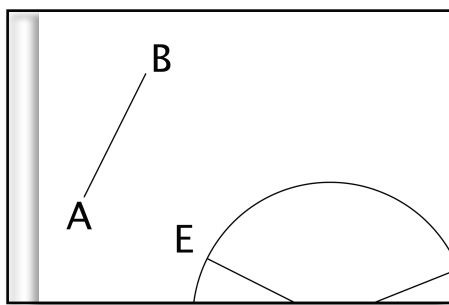
Assioma 9 Triangoli congruenti hanno aree uguali.

Proposizione I.3

Possiamo togliere da un segmento più lungo un segmento più breve.



dati iniziali



costruzione

Siano AB e CD due segmenti di differente lunghezza, e CD sia il più lungo.

Si chiede di togliere dal segmento più lungo CD un segmento uguale al segmento più piccolo AB.

Costruiamo CE a partire da C uguale alla linea retta AB [prop I.2]

e descriviamo il cerchio con centro C e raggio CE [assioma 3]

Chiamiamo F l'intersezione tra il cerchio disegnato e il segmento CD [assioma 6]

Ora, siccome il punto C è il centro del cerchio EF, CE è uguale a CF. [def. di cerchio]

Ma AB è anche uguale a CE, e dunque CF anche è uguale a AB. [nozioni comuni]

Dunque, dati due segmenti AB e CD, CF uguale al minore AB è stata tolta da CD che è il maggiore.

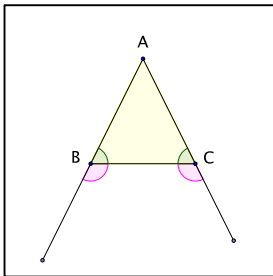
QED

Le due proposizioni seguenti mostrano che un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali.

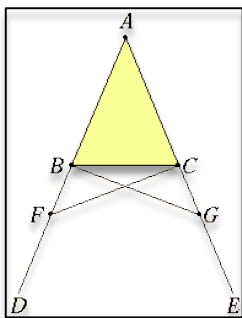
Proposizione I.5

In ogni triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e, se prolunghiamo i lati uguali, gli angoli sotto la base sono uguali.

Dimostrazione

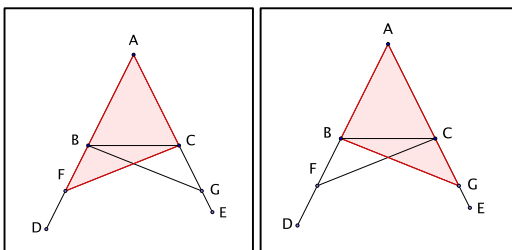


Consideriamo un triangolo isoscele (I.Def.20) ABC^Δ con il lato AB uguale al lato AC. Prolunghiamo il lato AB a partire da B con BD e prolunghiamo il lato AC a partire da C con CE (post. I.2). Vogliamo mostrare che gli angoli \widehat{ABC} e \widehat{ACB} (in verde) sono uguali e che anche gli angoli \widehat{CBD} e \widehat{BCE} (in rosa) sono uguali tra loro.

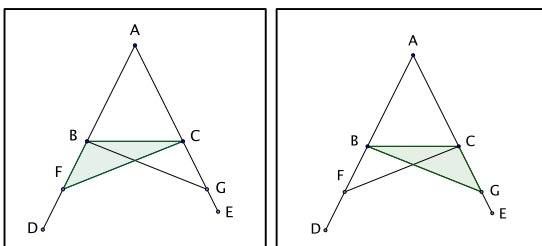


Fissiamo un punto F su BD. Su AE, o su un suo prolungamento, prendiamo un punto G tale che AG sia lungo come AF [prop. I.3]. Congiungiamo il punto B con G e il punto C con F (post. I.1)

costruzione



Consideriamo i triangoli AFC^Δ e AGB^Δ : essi hanno uguali i lati AF e AG, come anche i lati AC e AB. Inoltre, hanno in comune l'angolo FAG, compreso tra i lati uguali. I due triangoli sono dunque congruenti per LAL. In particolare FC e BG sono uguali, gli angoli \widehat{ACF} e \widehat{GBA} coincidono e gli angoli \widehat{AFC} e \widehat{BGA} coincidono.



Ora consideriamo i triangoli BFC^Δ e BGC^Δ . Poiché il segmento AF è uguale ad AG e il segmento AB è uguale ad AC, per differenza il segmento BF è uguale a CG (NC.3). Inoltre i due triangoli hanno uguali i lati FC e BG e gli angoli \widehat{BFC} e \widehat{BGC} per quanto visto. Dunque i due triangoli sono congruenti per LAL. In particolare, l'angolo \widehat{CBF} ($=\widehat{CBD}^\Delta$) è uguale all'angolo \widehat{BCG} ($=\widehat{BCE}^\Delta$): era uno dei risultati che volevamo dimostrare.

Abbiamo provato che gli angoli \widehat{ABG} e \widehat{ACF} sono congruenti tra loro e gli angoli \widehat{CBG} e \widehat{BCF} sono congruenti tra loro; possiamo quindi concludere che l'angolo \widehat{ABC} (ottenuto da \widehat{ABG} sottraendo \widehat{CBG}) è uguale all'angolo \widehat{ACB} (ottenuto da \widehat{ACF} sottraendo \widehat{BCF}) (C.N.3).

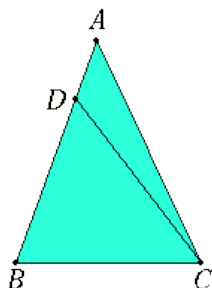
QED

La successiva proposizione è l'inversa della n.5.

Proposizione I.6

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora i lati opposti agli angoli uguali sono uguali.

Dimostrazione



Sia ABC un triangolo nel quale l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB. Dobbiamo mostrare che i lati AB e AC sono uguali.

Procediamo per assurdo. Se AB e AC non sono uguali, uno di essi è maggiore dell'altro (C.N.).

Dunque AB è maggiore o minore di AC.

Si osservi che questa deduzione si basa su una legge non elencata nelle nozioni comuni: è detta 'legge di tricotomia' e afferma che 'date due quantità omogenee AB e AC, allora $AB > AC$, oppure $AB = AC$ oppure $AB < AC$ '.

Supponiamo che AB sia maggiore di AC. Nel segmento AB, fissiamo il punto D tale che BD sia uguale a AC (I.3);

tracciamo il segmento DC (I. Post. I).

Consideriamo i triangoli DBC e ACB: in essi $BD = AC$ per costruzione, BC in comune, angolo in B in comune. Per LAL, i due triangoli sono quindi congruenti.

Per l'assioma 9, i due triangoli hanno aree uguali. Ma il triangolo BCD è strettamente contenuto in BCA, e ha dunque un'area strettamente minore. Assurdo: quindi non è possibile che AB sia maggiore di AC.

Supponiamo che AB sia minore di AC. (completare per esercizio la dimostrazione) QED