Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale

Esame di Geometria (Prof. F. Tovena) 2014

Argomenti: Matrici diagonali a blocchi, spazi vettoriali euclideo e prodotto scalare definito positivo, modulo di un vettore, proiezione lungo un vettore, vettori ortogonali, basi ortogonali e basi ortonormali, procedimento di Gram Schmidt, matrici ortogonali, teorema spettrale, prodotti scalari e forme quadratiche e matrice simmetrica associata, matrici congruenti, forma canonica metrica e forma canonica affine di una forma quadratica. Algoritmo di Gauss-Lagrange. Matrici simmetriche reali definite e semidefinite positive e negative. Criteri di positivita' e semipositivita'.

1) *Riconosci i blocchi nelle seguenti matrici diagonali a blocchi e esprimi il loro polinomio caratteristico come prodotto dei polinomi caratteristici dei blocchi.*

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Lungo la diagonale principale di $\mathbf{A}_1$ si riconoscono un blocco quadrato $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ di ordine 2 e uno di ordine 3 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. In $\mathbf{A}_2$, un blocco di ordine 2, uno di ordine 1 e ancora un blocco di ordine 2. In $\mathbf{A}_3$, un blocco di ordine 1, e poi due blocchi di ordine 2. Completare calcolando i polinomi caratteristici dei singoli blocchi e ricavando l'espressione cercata del polinomio caratteristico della matrice intera. Ad esempio,

$$p_{\mathbf{A}_1}(t) = det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} \; det \begin{pmatrix} 1-t & 5 & 6 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 5 & 1 & 6-t \end{pmatrix}$$

2) *Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare standard, considera i seguenti vettori:*

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_2 = (-1,0,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,2,1)$$

e i sottospazi $U =< \mathbf{v}_1 >$, $W =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$, $Z =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$, $T =< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$.

a) Determina la dimensione e una base di ciascuno dei sottospazi: $U^\perp$, $W^\perp$, $Z^\perp$, $T^\perp$.

b) Determina la dimensione e una base di ciascuno dei sottospazi: $U^\perp \cap W^\perp$ e di $U^\perp + W^\perp$.

c) Determina la dimensione e una base di ciascuno dei sottospazi: $U^\perp \cap T^\perp$, $U^\perp + T^\perp$.

d) Determina la componente parallela e la componente ortogonale di $\mathbf{v}_1$ rispetto a $\mathbf{v}_2$.

Soluzione (Cenni) Lo spazio dei vettori ortogonali a U coincide con lo spazio dei vettori ortogonali a $\mathbf{v}_1$, e dunque con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$(2\ 1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 + x_4 = 0\,.$$

In particolare, $U^\perp$ ha dimensione 2. Per trovare $W^\perp$, bisogna prendere i vettori ortogonali sia a $\mathbf{v}_1$ che a $\mathbf{v}_2$, cioè le soluzioni di $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, che formano un sottospazio di dimensione 1. In particolare, $W^\perp \subset U^\perp$, e quindi $U^\perp \cap W^\perp = W^\perp$, mentre $U^\perp + W^\perp = U^\perp$. Si ragiona in modo analogo per le altre domande in a), b), c).

Per d), la componente parallela di $\mathbf{v}_1$ rispetto a $\mathbf{v}_2$ è la proiezione di $\mathbf{v}_1$ lungo la direzione di $\mathbf{v}_2$:

$$(\mathbf{v}_1)_{//} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\ \mathbf{v}_2 = \frac{-1}{6}\ (2, 1, 0, 1)$$

mentre la componente ortogonale si ottiene per differenza:

$$(\mathbf{v}_1)_\perp = \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2$$

Risulta $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1)_{//} + (\mathbf{v}_1)_\perp$

3) *Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard, considera i seguenti vettori:*

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 2), \mathbf{v}_3 = (3, 1, 1)$$

Determina una base ortonormale $\mathcal{B} = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ di $\mathbf{R}^3$ tale che

$$< \mathbf{u}_1 >=< \mathbf{v}_1 >, < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 >=< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >, < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 >=< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 > .$$

Soluzione (Cenni) Basta applicare il metodo di Gram Schmidt ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (che formano una base perché la matrice che ha tali vettori come righe, risulta avere determinante non nullo). Si procede definendo $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1$, e poi sostituendo $\mathbf{v}_2$ con la sua componente ortogonale

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1}\mathbf{v}'_1 = (1, -1, 2) - \frac{4}{5}(2, 0, 1) = (-\frac{3}{5}, -1, \frac{2}{5})$$

rispetto a $\mathbf{v}'_1$ (ottenuta sottraendo a $\mathbf{v}_2$ la componente parallela a $\mathbf{v}'_1$. Infine, si sostituisce $\mathbf{v}_3$ con il vettore

$$\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1}\mathbf{v}'_1 - \frac{\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2}\mathbf{v}'_2 = (3, 1, 1) - \frac{-\frac{4}{5}}{5}(2, 0, 1) - \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{38}{25}}(-\frac{3}{5}, -1, \frac{2}{5})$$

ottenuto sottraendo le componenti rispetto a $\mathbf{v}'_1$ e a $\mathbf{v}'_2$. Ora basta completare i calcoli.

In questo modo, i vettori vengono modificati uno alla volta, in modo tale che ciascuno diventi ortogonale ai vettori precedentemente controllati. Per ottenere la base ortonormale cercata, è sufficiente normalizzare $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3$ definendo $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1}}\mathbf{v}'_1, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2}}\mathbf{v}'_2, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}'_3 \cdot \mathbf{v}'_3}}\mathbf{v}'_3$.

4) *Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare standard, considera i seguenti vettori:*

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$$

a) Verifica che $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

b) Denota con $\mathbf{x}'$ le coordinate di un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Determina una matrice $\mathbf{O}$ tale che $\mathbf{O}\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

Soluzione (Cenni) a) È sufficiente controllare che $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ e che $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = 1$.

b) La matrice $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M}\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ è la matrice che ha per colonne le coordinate in base canonica dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ (è la matrice dell'identità con base $\mathcal{B}$ nel dominio e base canonica nel codominio). Si ha quindi $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matrice cercata $\mathbf{O}$ è l'inversa di $\mathbf{M}$: ma $\mathbf{M}$ è ortogonale, e la sua inversa coincide con la trasposta. Dunque $\mathbf{O} = \mathbf{M}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Esercizi da svolgere.

1) In $\mathbf{R}^5$, con prodotto scalare standard, considera i vettori $\mathbf{v}_1(4, -1, 0, 1, -1)$ e $\mathbf{v}_2(1, 0, 3, -1, 1)$.

a) Calcola il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \cdot t\mathbf{v}_2$.

b) Decomponi $\mathbf{v}_2$ come somma di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$, con $\mathbf{u}$ proporzionale a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u}'$ ortogonale a $\mathbf{v}_1$.

c) Determina una base ortonormale del sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

d) Calcola la dimensione e una base del sottospazio ortogonale a $\mathbf{v}_1$.

e) Calcola la dimensione e una base del sottospazio ortogonale al sottospazio W generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

2) In uno spazio euclideo di dimensione 4, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale. Considera i punti $A(1, 1, 0, -1)$, $B(1, 0, 3, 2)$, $C(0, 3, 0, 1)$.

a) Determina la distanza $d(A, B)$ tra A e B.

b) Verifica che $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

c) Determina l'equazione cartesiana dell'iperpiano H per C e ortogonale a $\mathbf{AB}$ e calcola la distanza tra A e H

d) Controlla se è parallela ad H la retta r di numeri direttori $(1, 0, 0, 0)$.

e) Determina equazioni cartesiane per un sottospazio S di dimensione 2 e ortogonale al piano α generato da A, B, C. L'intersezione $S \cap \alpha$ può essere vuota?

3) In uno spazio euclideo di dimensione 3, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$. Considera il vettore $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e il punto $Q(3, 0, -2)$.

a) Determina l'equazione cartesiana del piano α ortogonale a $\mathbf{n}$ e passante per Q.

b) Controlla se sono ortogonali le rette r passante per Q e parallelo ad $\mathbf{n}$ e la retta s di equazioni $x_1 + x_2 + 3x_3 + 1 = 0$, $2x_2 - x_3 - 5 = 0$.

Determina (se tale retta esiste) equazioni cartesiane per una retta t_1 passante per Q e ortogonale sia a r che a s.

Determina (se tale retta esiste) equazioni parametriche per una retta t_2 incidente sia r che s e ortogonale a $\mathbf{i}$.

Determina (se tale retta esiste) equazioni cartesiane per una retta t_3 incidente sia r che s e ortogonale sia a r che a s.

c) Determina il prodotto esterno $\mathbf{n} \wedge \mathbf{w}$, ove $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

d) Determina l'area del parallelogramma di vertici $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-1, 4, 2)$.

4) In uno spazio euclideo di dimensione 2, sia fissato un sistema di riferimento monometrico ortonormale $(O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}))$. Considera la retta r di equazioni parametriche $x_1 = 2 + 2t$, $x_2 = -1 + t$ $(t \in \mathbf{R})$.

a) Determina l'equazione cartesiana della retta s passante per $A(3, -7)$ e ortogonale alla retta r.

b) Determina le coordinate della proiezione ortogonale B' di $B(-2, 1)$ su r.