Esame di Geometria del 4 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5cfu$
☐ $orale\, primo\, appello$
☐ $orale\, secondo\, appello$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette r e s definite da

$$r : x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2 ; \qquad s : x = 2t - 1, y = 1 + t, z = 3 - t$$

a) Mostrare che r e s sono sghembe.
b) Determinare le equazioni cartesiane della retta passante per $P(2, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette.

2. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ definita da $T(p(x)) = x^2 p''(x)$.

a) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} T$.

b) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} T$.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Esame di Geometria del 4 luglio 2013

$\square$ $5cfu$

Nome: Cognome: Corso di Laurea: $\square$ *orale primo appello*

$\square$ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A(2,3,1)$, $B(3,8,-2)$, $C=(1,-2,2)$.
a) Determinare l'area del triangolo di vertici A, B, C.
b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per C e parallela ad $\vec{AB}$.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sia $T : V \to V$ definita da $T(X) = AX$.

a) Determinare la dimensione e una base di Ker T.

b) Determinare la dimensione e una base di Im T.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0.

Esame di Geometria del 4 luglio 2013

☐ $5cfu$

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ *orale primo appello*

☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette r_1 e r_2 definite da

$$r_1 : 2x + y + z + 2 = 0, x + 2z - 1 = 0\,; \qquad r_2 : x + 2y + 1 = 0, 2x + 3y - z + 4 = 0.$$

a) Determinare le coordinate dei punti nell'intersezione tra r_1 e r_2.
b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente r_1 e r_2, e la distanza tra π e l'origine.

2. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Considera l'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ definita da $T(p(x)) = (x+1)p'(x)$.

a) Determinare la dimensione e una base di Ker T.

b) Determinare la dimensione e una base di Im T.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Esame di Geometria del 4 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5cfu$
☐ *orale primo appello*
☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette r e s definite da

$$r : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 1\,; \qquad s : x = 2t - 3, y = 1 + t, z = 2 - t$$

a) Determinare una equazione cartesiana del piano π passante per $A(1, 3, -4)$ e parallelo ad r e ad s.
b) Determinare la distanza di π dall'origine.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Sia $T : V \to V$ definita da $T(X) = XA$.

a) Determinare la dimensione e una base di Ker T.

b) Determinare la dimensione e una base di Im T.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Esame di Geometria del 4 luglio 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5cfu$
☐ $orale\,primo\,appello$
☐ $orale\,secondo\,appello$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino il punto P(2,3,1) e la retta r di equazioni $r : 2y + z = 0, 2x + y = 0$.
a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π che contiene P e r.
b) Determinare la distanza tra P e il punto di intersezione tra π e la retta $x = 0, y = 1$.

2. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Considera l'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ definita da $T(p(x)) = (x-3)p'(x)$.

a) Determinare la dimensione e una base di Ker T.

b) Determinare la dimensione e una base di Im T.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Esame di Geometria del 4 luglio 2013

$\square$ $5cfu$

Nome: Cognome: Corso di Laurea: $\square$ $orale\ primo\ appello$

$\square$ $orale\ secondo\ appello$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.**
Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P(1,2,0)$, $Q(2,0,-1)$, $R(1,0,1)$ e il piano π che li contiene.
a) Determinare una equazione cartesiana per π.
b) Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per l'origine e perpendicolare a π.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sia $T : V \to V$ definita da $T(X) = XA$.

a) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Ker} T$.

b) Determinare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} T$.

c) Fissare una base di V e determinare la matrice che rappresenta T in quella base.

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica e geometrica.
b) f è diagonalizzabile?
c) Determinare una base per l'autospazio relativo all'autovalore 0.