Esame di Geometria del 12 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5cfu$
☐ *orale primo appello*
☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-1, -1, -1)$ ed $R = (3, -1, -1)$.

a) Trovare l'equazione cartesiana del piano α passante per i tre punti dati.

b) Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per R e parallela a $\vec{PQ}$.

c) Calcolare le coordinate di un punto S tale che P, Q, R, S siano vertici di un parallelogramma, e determinare l'area di tale parallelogramma.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $M(2,\mathbb{R})$ definita da

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} b+c & a-c \\ a+b & -a+b+2c \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M(2,\mathbb{R})$.

Nome: Cognome:

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & k+1 & 0 \\ k & k-1 & 2k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = 1$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .

Esame di Geometria del 12 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea: ☐ $5cfu$ ☐ *orale primo appello* ☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i piani α, β e γ definiti da

$$\alpha : 2x + 3y - z + 2 = 0\,; \qquad \beta : -x + 2y + z - 2 = 0\,; \qquad \gamma : x - y - z + 1 = 0$$

Si considerino la retta r intersezione di α e β e il punto $A(1,1,1)$.
a) Determinare la distanza di A dal piano α.
b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano per A ortogonale a r.
c) Determinare l'intersezione tra r e γ.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$f(a,b,c) = (b-c) + (a+c)x + (a-b+2c)x^2 + (a+b)x^3$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}_3[x]$.

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & k-2 & 0 \\ k & k+2 & 2k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = -2$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .

Esame di Geometria del 12 settembre 2013

Nome: Cognome: Corso di Laurea:

☐ $5cfu$
☐ *orale primo appello*
☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro punti $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (-1, 1, 1)$, $D = (1, -1, 3)$.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano α passante per i punti A, B, C.

b) Determinare l'equazione cartesiana del piano per D e parallelo al piano α e la distanza di D da α.

c) Determinare il volume del tetraedro di vertici A, B, C, D.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $M(2,\mathbb{R})$ definita da

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & a-b \\ 2a-b+c & b+c \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M(2,\mathbb{R})$.

Nome: Cognome:

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & k-1 & 0 \\ k & k+1 & 2k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = -1$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .

Esame di Geometria del 12 settembre 2013

Nome:	Cognome:	Corso di Laurea:	☐ $5cfu$ ☐ $orale\, primo\, appello$ ☐ $orale\, secondo\, appello$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro punti $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 0)$, $C = (-1, 0, -1)$, $D = (9, 2, -7)$.

a) Trovare una equazione cartesiana del piano α che contiene i punti A, B, C.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto D e perpendicolare al piano α.

c) Scrivere il vettore $\vec{AD}$ come somma $\vec{u} + \vec{v}$ di un vettore $\vec{u}$ parallelo ad α e di un vettore $\vec{v}$ ortogonale ad α.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$f(a,b,c) = (a-b) + (b+c)x + (a-2b-c)x^2 + (a+c)x^3$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}_3[x]$.

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & k+2 & 0 \\ k & k-2 & 2k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = 2$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .

Esame di Geometria del 12 settembre 2013

			☐ $5cfu$
Nome:	Cognome:	Corso di Laurea:	☐ $orale\,primo\,appello$
			☐ $orale\,secondo\,appello$

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i piani α, β e γ definiti da

$$\alpha : 2x + 3y - z = 0\,; \qquad \beta : 2y + z - 1 = 0\,; \qquad \gamma : x - y - z + 1 = 0$$

Si considerino la retta r_1 intersezione di α e β e la retta r_2 intersezione di α e γ.
a) Determinare equazioni parametriche per la retta r_1.
b) Determinare equazioni cartesiane di una retta s del piano α che sia ortogonale a r_1 e passante per $A(2, 0, 4)$.
c) Determinare l'intersezione di r_1 e r_2.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $M(2,\mathbb{R})$ definita da

$$f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & b-c \\ a+c & a+2b-c \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M(2,\mathbb{R})$.

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & k+3 & 0 \\ -3k & 3-4k & 3k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = 1$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .

Esame di Geometria del 12 settembre 2013

Nome:	Cognome:	Corso di Laurea:	☐ $5cfu$ ☐ *orale primo appello* ☐ *orale secondo appello*

Giustificare le risposte con **spiegazioni chiare ed essenziali.** Consegnare **esclusivamente** questi due fogli.

---

1. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ le rette l_1, l_2 definite da

$$l_1 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

a) Verificare che le rette l_1 ed l_2 sono sghembe.
b) Determinare una equazione cartesiana del piano α per l_1 e parallelo alla retta l_2.
c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta passante per $(-1, 0, 1)$ ortogonale a l_1 e contenuta in α.

2. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_3[x]$ definita da

$$f(a,b,c) = (a-c) + (a+b)x + (2a+b-c)x^2 + (b+c)x^3$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$, una base di $\mathrm{Im} f$ e le loro dimensioni.
b) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}_3[x]$.

Nome: Cognome:

---

3. Si consideri per ogni $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & k-3 & 0 \\ -3k & 4k+3 & 3k \end{pmatrix}$$

a) Determinate per quali valori di k, A_k non è diagonalizzabile.
b) Per $k = -1$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata di autovettori di A_k .