PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2, MATEMATICA, 17/06/2014

Nome ....

Matricola ....

Per ogni risposta, segnare V se è vera, F se è falsa. Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0. Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici sono scritte come vettori righe.

Test 1. Nel piano euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(2+i, 1-2i)$.

V F (a) la retta $x - 2y - 3i = 0$ passa per P ed è ortogonale ad una retta reale;
V F (b) una opportuna retta isotropa per P contiene anche il coniugato $\overline{P}$;
V F (c) Ogni retta reale per P contiene il punto $Q(2, 1)$.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera i piani α di equazioni $x_1 - 2x_3 - 1 + 2i = 0$ e β di equazione $ix_2 + ix_3 - 2i + 2 = 0$.

V F (a) l'intersezione di α e β è una retta;
V F (b) l'intersezione di α e β contiene almeno un punto reale;
V F (c) l'intersezione di α e β è contenuta nel piano di equazione $x_1+x_2-x_3-3 = 0$.

Test 3. Considera la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definita da

$$\varphi[x_0, x_1, x_2] = [-4x_0 - 6x_1 + 3x_2, 3x_0 + 5x_1 - 3x_2, -x_2].$$

V F (a) il punto $P[-1, 1, 0]$ è fisso per φ;
V F (b) una unica retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è formata da punti fissi per φ;
V F (c) I punti fissi di φ sono contenuti in una unica retta.

Test 4. Nello spazio vettoriale V delle matrici quadrate a coefficienti reali e di ordine 2, considera il nucleo W dell'endomorfismo f di V definito da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a-b & 4a-2b \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}.$$

V F (a) V/W ha dimensione 3;
V F (b) le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rappresentano la stessa classe in V/W;
V F (c) l'applicazione $f : V/W \to \mathbb{R}^2$ definita da $f([A]) = (2a - b, c + 2d)$ (ove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) è ben definita e suriettiva,

Test 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, considera la base $\mathcal{B}$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0)$ e U il sottospazio generato da $\mathbf{v}_3$. Denota con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ la base duale.

V F (a) $(-e_1^* + e_2^* + 2e_3^*)(\mathbf{v}_1) = 1$;
V F (b) l'annullatore di U ha dimensione 2;
V F (c) la base duale di $\mathcal{B}$ contiene $\varphi = -e_1^* + e_2^* + e_3^*$.

Test 6. Nella retta proiettiva numerica reale $\mathbb{P}^1$, considera i punti $A[1,-1]$, $B[3,1]$, $C[1,2]$, $D[1,5]$.

V F (a) i punti A, B, C, D sono indipendenti;
V F (b) esiste una proiettività di $\mathbb{P}^1$ in sè tale che l'immagine di A, B sono punti fondamentali e l'immagine di C è D;
V F (c) il birapporto $(ABCD)$ è $[21, 15]$.

Test 7. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x, y) \mapsto [1, x, y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $6x - 2y - 5 = 0$.

V F (a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $11x_0 + 3x_1 - 2x_2 = 0$ è parallela ad r;
V F (b) il completamento proiettivo di r ha equazione omogenea $5x_0 + 6x_1 - 2x_2 = 0$;
V F (c) il punto improprio di r è $[0, 1, 3]$.

Test 8. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $x_2^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0$.

V F (a) la conica Γ contiene la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$;
V F (b) la conica Γ ha rango 2;
V F (c) il punto $P[1, -1, 0]$ è doppio per Γ.

Test 9. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2 - 2xy - 4y - 3 = 0$:

V F (a) è una ellisse con centro $(-2 - 2)$;
V F (b) è una iperbole con centro $(-2 - 2)$;
V F (c) ha per asintoto la retta $x = -2$.

Test 10. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2 - 4y^2 - 2 = 0$:

V F (a) è una conica non degenere;
V F (c) è tangente alla retta di equazione $x = 1$.
V F (d) ha per diametro la retta $x - 4y = 0$.