PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2, MATEMATICA, 17/06/2013

Nome ....

Matricola ....

Ogni test viene valutato 3 punti se vengono date tutte e sole le risposte corrette. Altrimenti, la valutazione è 0.

Nei seguenti test le coordinate dei punti e i vettori numerici si scrivono come vettori righe.

Test 1. Considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (-5x_1 - 4x_2 + 4x_3, 8x_1 + 7x_2 - 4x_3, 3x_3)$.

(a) il vettore $(-1, 1, 0)$ è un autovettore per f;
(b) la massima dimensione di un autospazio per f è 2;
(c) f è diagonalizzabile.

Test 2. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera il punto $P(2 + i, 4 - i, 3)$.

(a) per P passa una sola retta reale;
(b) Per P passa una unica retta isotropa;
(c) la retta di equazioni $x_1 + x_2 + 6 = 0, x_1 + x_3 - 5 - i = 0$ passa per P ed è ortogonale ad una retta reale per P.

Test 3. Nello spazio euclideo complessificato, sia fissato un sistema di riferimento ortonormale reale. Considera la retta r di equazioni

$$x_1 - 2ix_2 - 1 - 4i = 0, ix_1 - 2ix_3 + 1 = 0.$$

(a) la retta r è reale;
(b) la retta r è isotropa;
(c) la retta r è parallela al piano di equazioni $ix_2 - x_3 = 0$;
(d) la retta r ha un punto reale.

Test 4. Nello spazio vettoriale V delle matrici reali 3×3, considera il sottospazio U delle matrici a traccia nulla e denota con $\pi : V \to V/U$ l'applicazione quoziente. Considera inoltre l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^3$ definita da $A \mapsto A\,(2, 1, 1)^t$.

(a) lo spazio V/U ha dimensione 3;
(b) le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ rappresentano la stessa classe in V/U;
(c) esiste una applicazione lineare $g : V/U \to \mathbb{R}^3$ tale che $f = g \circ \pi$.

Test 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, considera l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 4x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$ e l'applicazione trasposta $f^t : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}^{3*}$ indotta tra gli spazi vettoriali duali.

(a) l'applicazione f^t ha rango 2;
(b) il nucleo di f^t è generato da $-7e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$;
(c) l'intersezione dei nuclei delle forme lineari $\varphi \in Im\, f^t$ è uno spazio vettoriale non nullo.

Test 6. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2$, considera i punti $A[2, 1, 3]$, $B[1, 1, 1]$, $C[3, 2, 4]$, $D[4, 3, 5]$.

(a) i punti A, B, C, D sono allineati;
(b) esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2$ in sè tale che l'immagine di A, B siano punti fondamentali e l'immagine di C sia il punto untià;
(c) il birapporto $(ABCD)$ è $[2, 4]$.

Test 7. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^5$, considera i punti $A[1, 0, 0, 1, 1, 3]$, $B[0, 0, 1, 1, 1, 1]$, $C[2, 1, -1, 0, 0, 0]$ e il sottospazio congiungente $U = A \vee B \vee C$.

(a) la stella di iperpiani per U ha dimensione proiettiva 2;
(b) per ogni iperpiano H di $\mathbb{P}^5$, l'intersezione di H con U contiene una retta;
(c) esiste una unica proiettività di $\mathbb{P}^5$ in sè per la quale U è puntualmente fisso.

Test 8. Nel piano proiettivo reale considera le coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e la conica Γ di equazione $2x_0^2 + 3x_0x_1 - 3x_0x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$.

(a) la conica Γ contiene due rette distinte;
(b) la conica Γ contiene la retta di equazione $-x_0 + x_1 - x_2 = 0$;
(c) il punto $P[0, 1, 1]$ è doppio per Γ.

Test 9. Nel piano euclideo, la conica di equazione $x^2 - 3y^2 + 4x - 2y = 0$:

(a) è una iperbole col centro nel punto $(-\frac{1}{3}, 2)$;
(b) è una iperbole col centro nel punto $(-2, -\frac{1}{3})$;
(c) è una ellissi col centro nel punto $(-1, -\frac{1}{3})$;
(d) uno degli asintoti di C è parallelo all'asse y.

Test 10. Considera l'inclusione del piano affine nel piano proiettivo numerico data da $(x, y) \mapsto [1, x, y]$. Considera inoltre la retta r di equazione $3x - 2y - 5 = 0$.

(a) la parte affine della retta proiettiva di equazione $6x_1 - 4x_2 = 0$ è parallela ad r;
(b) l'equazione omogenea del completamento proiettivo di r è $3x_0 - 2x_1 - 5x_2 = 0$;
(c) la retta r è la polare di un punto proprio P rispetto alla conica di equazione $x^2 - y^2 + 4x - 2y = 0$.