

**Argomenti:** Proprietà di nucleo e immagine di una applicazione lineare.  $\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$ . Applicazione lineare definite su una base. Matrice associata ad una applicazione lineare, rispetto ad una scelta delle basi in dominio e codominio. Composizione di funzioni. Autovettori ed autovalori di una matrice e un endomorfismo. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Polinomio caratteristico. Teorema:  $f : V \rightarrow V$  è diagonalizzabile se e solo se  $V$  ammette una base di autovettori di  $f$ .

- 1) Si denoti con  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^4$  generato dai vettori:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il sottospazio  $W$  formato dal nucleo dell'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4).$$

- a) Determinare la dimensione ed una base di  $W$ .

b) Determinare la dimensione ed una base di  $U \cap W$  e dedurre la dimensione di  $U + W$  tramite la Formula di Grassmann. Determinare inoltre la dimensione di  $f(U)$ . c) Determinare la dimensione ed una base di  $W + Z$  ove  $Z = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , ove con  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  si denotano i primi due vettori della base canonica. Dedurre la dimensione di  $W \cap Z$  tramite la formula di Grassmann.

- 2) Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

b) L'applicazione  $f$  è un isomorfismo? In caso negativo, determinare una base per  $\text{Ker } f$  ed una base per  $\text{Im } f$ .

- 3) Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3).$$

Indicata con  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canonica, si consideri inoltre la base

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$$

- a) Determinare la matrice  $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$  associata a  $f$  nella base canonica.

b) Determinare l'applicazione  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la cui matrice, rispetto alla base canonica, coincide con  $M$ .

4) Si consideri l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di  $f$ .

b) Determinare, se esiste, una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^2$  tale che la matrice  $D$  di  $f$  in tale base sia diagonale.

5) Si consideri l'operatore lineare di  $\mathbf{R}^3$  definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y + z, z).$$

Determinare, se è possibile, una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^3$  tale che la matrice  $D = M_{\mathcal{B}}(f)$  di  $f$  sia diagonale.

### Esercizi da svolgere.

1) Considera l'applicazione  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ , definita da  $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y + 2z)$ .

i) Dimostra che  $f$  è una applicazione lineare.

ii) Determina la dimensione ed una base di  $\text{Im } f$  e  $\text{Ker } f$  rispettivamente.

iii) Determina la dimensione e una base dell'immagine, tramite  $f$ , del sottospazio di  $\mathbf{R}^3$  definita da  $x + y - 2z = 0$ .

2) Determinare gli autovalori ed una base di ciascun autospazio dell'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  definito da:

$$f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 4x - 2y - 4z, 4x - 4y - 2z).$$

3) Determinare il polinomio caratteristico della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Soluzioni

1) Si denoti con  $U$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^4$  generato dai vettori:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri inoltre il sottospazio  $W$  formato dal nucleo dell'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4, x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4).$$

a) Determinare la dimensione ed una base di  $W$ .

b) Determinare la dimensione ed una base di  $U \cap W$  e dedurre la dimensione di  $U + W$  tramite la Formula di Grassmann. Determinare inoltre la dimensione di  $f(U)$ . c) Determinare la dimensione ed una base di  $W + Z$  ove  $Z = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , ove con  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  si denotano i primi due vettori della base canonica. Dedurre la dimensione di  $W \cap Z$  tramite la formula di Grassmann.

### Soluzione

a) Il sottospazio  $W$  è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 2 e dunque  $W$  ha dimensione  $4 - 2 = 2$ . Scambiando l'ordine delle equazioni, il sistema è già ridotto; in particolare,  $x_3$  e  $x_4$  possono essere impiegati come parametri liberi. Come base di  $W$  posso prendere i vettori:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Osservo che  $\dim U = 2$ , perchè i suoi generatori  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  sono linearmente indipendenti.

**Primo modo** Un vettore appartiene a  $U$  se e solo se è della forma  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 =$

$\begin{pmatrix} 3s + t \\ t \\ s \\ -s + t \end{pmatrix}$ . Un tale vettore appartiene (anche) a  $W$  se e solo se soddisfa le equazioni di  $W$ ,  
cioè se e solo se

$$\begin{cases} t - s = 0 \\ 2(3s + t) - 3s - 5t + 2(-s + t) = 0 \quad \text{cioè } t - s = 0 \\ ((3s + t)) - 2s - 2t + (-s + t) = 0 \end{cases}$$

Il sistema nelle incognite  $s$  e  $t$  è dunque compatibile, e le sue soluzioni dipendono da un parametro libero, e dunque  $\dim U \cap W = 1$ . Presa una soluzione non nulla  $s = t = 1$ , ottengo un vettore (uguale a  $\vec{w}_1$ ) della base di  $U \cap W$  sostituendo nell'equazione parametrica di  $U$ .

Per studiare la dimensione di  $f(U)$  possiamo osservare che  $f(U)$  è generato dalle immagini  $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)$  della base  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  di  $U$ . Deduciamo che  $\dim f(U) = 1$  calcolando esplicitamente  $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)$  e osservando che sono tra loro proporzionali; alternativamente, sappiamo che tale dimensione è 1 perché l'intersezione tra  $U$  e il nucleo di  $f$  ha dimensione 1.

**Secondo modo** Determino un sistema di equazioni cartesiane per  $U$ . Avendo determinato nell'esercizio precedente le equazioni di  $U$ , posso determinare l'intersezione  $U \cap W$  come spazio delle soluzioni del sistema ottenuto prendendo sia le equazioni di  $W$  che quelle di  $U$  (che moltiplico per 3 per eliminare il denominatore):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di tale sistema è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

una cui forma ridotta è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'intersezione  $U \cap W$  ha dunque dimensione  $4 - 3 = 1$  ed una base è data da  $\mathbf{w}_1$ . La dimensione di  $U + W$  è  $3 = 4 - 1$ , in base alla formula di Grassmann.

Lo studio della dimensione di  $f(U)$  si svolge come dettagliato nel primo modo di soluzione.

c) La dimensione ed una base di  $W + Z$  è la dimensione di  $\text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ , che è pari al rango della matrice che ha i generatori per righe. Riducendo a scala tale matrice, si verifica che tale rango è 4. Per la formula di Grassmann,  $W \cap Z$  ha dimensione 0 ed è dunque lo spazio vettoriale nullo.

2) Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

b) L'applicazione  $f$  è un isomorfismo? In caso negativo, determinare una base per  $\text{Ker } f$  ed una base per  $\text{Im } f$ .

**Soluzione** a) Osservo che l'applicazione lineare  $f$  è ben definita perché

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base (perché i tre vettori che la compongono sono linearmente indipendenti). Indicata con  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canonica, la matrice associata a  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  nel dominio e  $\mathcal{E}$

nel codominio è

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)$ , ricordiamo che

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id) \quad (1)$$

e che

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id) = M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto (1) si ottiene che

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -10 & 16 & -7 \\ 9 & -15 & 7 \\ 17 & -29 & 14 \end{pmatrix}.$$

b) Osservo che  $rg M_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = 2$  e concludo che  $f$  non può essere un isomorfismo perché  $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} M_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = 2$ . Poiché la base utilizzata nel codominio è la base canonica, come base di  $\operatorname{Im} f$  basta prendere due colonne linearmente indipendenti di  $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ : una base di  $\operatorname{Im} f$  è dunque

data da  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Dalla relazione fondamentale delle applicazioni lineari, ricavo che

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$ : una sua base è dunque composta da un suo vettore non nullo. Risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice  $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ , ricavo che una sua soluzione non nulla è  $(-1, 6, 1)$ ; tale soluzione corrisponde al vettore  $-\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ .

3) Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3).$$

Indicata con  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la base canonica, si consideri inoltre la base

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$$

a) Determinare la matrice  $M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$  associata a  $f$  nella base canonica.

b) Determinare l'applicazione  $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  la cui matrice, rispetto alla base canonica, coincide con  $M$ .

**Soluzione** a) Per determinare la matrice  $M$ , ricordiamo che

$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id)M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f)M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id), \quad (2)$$

ove

- la matrice associata a  $f$  rispetto alla base canonica (in dominio e codominio) è

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- con  $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)$  si denota la matrice di passaggio dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{E}$ , che è la matrice  $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  avente per colonne le componenti (rispetto alla base canonica) dei vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ;
- la matrice  $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id)$  è l'inversa di  $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)$ , ed è dunque:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo il prodotto (2) si ricava:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- b) L'applicazione lineare  $g$  è definita da  $g(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 3x_2, x_2, 4x_1 - 2x_2 + 2x_3)$ .
- 4) Si consideri l'applicazione lineare  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definito dalla posizione:

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 6y).$$

- a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di  $f$ .
- b) Determinare, se esiste, una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^2$  tale che la matrice  $D$  di  $f$  in tale base sia diagonale.

**Soluzione:** a) La matrice  $A$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^2$  è  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ; il suo polinomio caratteristico è:  $p_A(t) = \det(A - tI) = t^2 - 7t$  e gli autovalori di  $f$  sono  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 7$ . L'autospazio  $V_0 = \ker(A)$  ha dimensione 1 ed è generato da  $\vec{v}_1 = (-3, 1)$ . L'autospazio  $V_7 = \ker(A - 7I)$  ha dimensione 1 ed è generato da  $\vec{v}_2 = (1, 2)$ .

b) Poiché i vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^2$  (che ha dimensione 2): questa è la base cercata.

- 5) Si consideri l'operatore lineare di  $\mathbf{R}^3$  definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y + z, z).$$

Determinare, se è possibile, una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^3$  tale che la matrice  $D = M_{\mathcal{B}}(f)$  di  $f$  sia diagonale.

**Soluzione:** a) La matrice  $A$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$  è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)t.$$

L'autospazio  $V_1 = \ker(A - I)$  ha dimensione 1 ed è generato da  $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ .

L'autospazio  $V_2 = \ker(A - 2I)$  ha dimensione 1 ed è generato da  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ . L'autospazio  $V_0 = \ker(A)$  ha dimensione 1 ed è generato da  $\vec{v}_3 = (1, -1, 0)$ .

Poiché i tre vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  formano una base  $\mathcal{B}$  formata da autovettori: tale base verifica le richieste.

- 6) Determina la dimensione ed una base di  $\ker f$  e  $\operatorname{Im} f$ , ove  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  è definita da  $f(x, y, z) = (x + 3z, 2x + y + z, 3x + y + 4z)$ .
- 7) Sia  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  l'applicazione lineare definita da  $f(\vec{e}_1) = (1, 0, 2, 0)$ ,  $f(\vec{e}_2) = (1, 2, 0, 1)$ ,  $f(\vec{e}_3) = (-1, 0, 2, 0)$ ,  $f(\vec{e}_4) = (1, 1, 0, 1)$ .
- a) Determina l'espressione di  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .
- b) Sia  $W$  il sottospazio generato da  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_3$ . Mostra che  $f(W) \subset W$ .
- 8) Denota con  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  la base canonica di  $\mathbf{R}^4$  e con  $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  quella di  $\mathbf{R}^3$ . Determinare, se esiste, una applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  tale che  $\operatorname{Im} f = \langle \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_3 \rangle$ ,  $\ker f = \langle \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle$ .
- 9) Sia  $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare definita da  $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3)$ .
- a) Determina la matrice  $A$  associata a  $T$  rispetto alla base canonica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$  di  $\mathbf{R}^4$  e alla base canonica  $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  di  $\mathbf{R}^3$ .
- b) Determina la dimensione ed una base di  $\operatorname{Im} T$ .
- c) Determina la dimensione ed una base del nucleo  $\ker T$ .
- 10) Sia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'unica applicazione lineare tale che  $f(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_1$ ,  $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$ ,  $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3$ , , ove con  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  si denoti una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbf{R}^3$ .
- a) Determina la matrice di  $f$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  in dominio e codominio.
- b) Determina le componenti in  $\mathcal{B}$  di un vettore  $\mathbf{v}$  tale che  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_3$ .
- 11) Considera l'applicazione lineare  $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$  definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3, 6x_1 - 2x_2 - x_3, 0).$$

- a) Determina una base per ciascuno dei sottospazi  $\operatorname{Ker} f$  e  $\operatorname{Im} f$ .
- b) Determina una base e la dimensione dell'intersezione  $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ .
- c) Determina una base e la dimensione di  $\operatorname{Ker}(f \circ f)$ .
- 12) Considera una base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  di uno spazio vettoriale  $V$  e una base  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  una base di uno spazio vettoriale  $W$  sullo stesso campo. Considera l'applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che  $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2$ ,  $f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \operatorname{Ker}(f)$ .
- a) Determina le coordinate  $(y_1, y_2)$  di  $f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3)$ , rispetto alla base assegnata del codominio. Determina, inoltre, la matrice di  $f$  nelle basi assegnate.
- b) Determina il nucleo di  $f$ .