Capitolo 8

Ipersuperficie affini

8.1 Ipersuperficie affini.

Sia $\mathbf{A}$ spazio affine di dimensione n su un campo k algebricamente chiuso (ad esempio, $k = \mathbf{C}$) e sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano di $\mathbf{A}$. Si denota con $P = P(\underline{t}) = P(t_1, \ldots, t_n)$ il punto in $\mathbf{A}$ di coordinate $(t_1, \ldots, t_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$.

Definizione 8.1.1 *Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbf{A}$ si dice* ipersuperficie irriducibile *di $\mathbf{A}$ se esiste un polinomio irriducibile $f(t_1, \ldots, t_n) = f(\underline{t}) \in k[t_1, \ldots, t_n]$ tale che:*

$$\begin{aligned} X &= \{P(\underline{a}) : f(\underline{a}) = 0\} \qquad (8.1) \\ &= \{P(a_1, \ldots, a_n) : f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}. \end{aligned}$$

Si ricorda che un polinomio $f(t_1, \ldots, t_n) \in k[t_1, \ldots, t_n]$ si dice *irriducibile* se $f \neq 0$ e inoltre $f = hg$ implica che o h o g è una costante.

L'espressione $f(\underline{t}) = f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ si dice *equazione cartesiana* dell'ipersuperficie nel riferimento $\mathcal{R}$. Ogni polinomio $f' = \lambda f$ ottenuto moltiplicando f per una costante non nulla dà ancora luogo ad una equazione della stessa ipersuperficie.

Osservazione 8.1.2 *La definizione di ipersuperficie non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.* Infatti, sia $\mathcal{R}'$ un altro riferimento di $\mathbf{A}$ e si denoti con $\underline{t}' = (t'_1, \ldots, t'_n)^t$ il vettore colonna delle coordinate di un punto nel riferimento $\mathcal{R}'$. Si scrivano inoltre come vettore colonna le coordinate $\underline{t}$ nel riferimento $\mathcal{R}$. Per le formule del cambiamento di riferimento (cf. cap. 3), esistono una matrice quadrata $\mathbf{B}$ non singolare di ordine n ed un vettore colonna $\underline{c} \in M(n, 1, k)$

tale che

$$\underline{t} = \mathbf{B}\underline{t}' + \underline{c} \qquad |\mathbf{B}| \neq 0; \tag{8.2}$$

per esteso:

$$\begin{cases} t_1 = b_{11}t'_1 + \ldots + b_{1n}t'_n + c_1 \\ \ldots \\ t_n = b_{n1}t'_1 + \ldots + b_{nn}t'_n + c_n. \end{cases} \tag{8.3}$$

Si consideri ora la sostituzione lineare nella variabile $\sigma : \underline{t} \mapsto \mathbf{B}\underline{t}' + \underline{c}$. Essa induce, nello spazio vettoriale dei polinomi, l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} k[\underline{t}] & \rightarrow & k[\underline{t}'] \\ f(\underline{t}) & \mapsto & f_\sigma(\underline{t}') = f(\mathbf{B}\underline{t}' + \underline{c}). \end{array} \tag{8.4}$$

Si osservi che:

1) deg f = deg f_σ;

2) l'applicazione $f \mapsto f_\sigma$ è un isomorfismo;

3) f è irriducibile se e solo se f_σ è irriducibile. Infatti, se $f_\sigma = h'g'$, allora $f = f_{\sigma\sigma^{-1}} = h'_{\sigma^{-1}}g'_{\sigma^{-1}}$. Ma l'irriducibilità di f comporta che deg $h'_{\sigma^{-1}}$ (= deg h') =0 oppure che deg $g'_{\sigma^{-1}}$ (= deg g')=0.

L'invarianza della definizione di ipersuperficie dalla scelta del riferimento segue ora dall'osservazione che

$$\begin{array}{rcll} X & = & \{P(\underline{t}) : f(\underline{t}) = 0\} & \text{in } \mathcal{R} \\ & = & \{P(\underline{t}') : f(\mathbf{B}\underline{t}' + \underline{c}) = f_\sigma(\underline{t}') = 0\} & \text{in } \mathcal{R}'. \end{array} \tag{8.5}$$

$\triangle$

Osservazione 8.1.3 Analogamente all'osservazione precedente, si mostra l'*invarianza della definizione di ipersuperficie per isomorfismi.* Si osservi in particolare che *resta invariato il grado dell'equazione cartesiana*

Osservazione 8.1.4 *La nozione di ipersuperficie non è invariante per affinità che non siano isomorfismi.* Ad esempio, si considerino in $\mathbf{A}^2$ la retta $X = \{y = 0\}$ e l'affinità $\pi : \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^1$ definita da $(x, y) \mapsto x$ e data dalla proiezione sull'asse x. Allora $\pi(\mathbf{A}^2) = \mathbf{A}^1$ ma l'unico polinomio in una variabile che si annulla su tutto $\mathbf{A}^1$ è il polinomio nullo.

8.2 Esempi.

Si denotino con d il grado dell'equazione cartesiana f di una ipersuperficie X e con n la dimensione dello spazio affine $\mathbf{A}$.

1) grado $d = 0$: $X = \emptyset$ si dice la *ipersuperficie nulla.*

2) grado $d = 1$: X è un iperpiano.

3) a) $n = \dim \mathbf{A} = 1$. Ogni polinomio $f(t)$ in una variabile si fattorizza come prodotto di fattori lineari:

$$f(t) = c \prod_{i=1}^{m} (t - a_i)^{\mu_i} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = d, \;\; a_i \in k \tag{8.6}$$

indicando con μ_i la molteplicità della radice a_i. Un polinomio non costante è dunque irriducibile se e solo se ha grado $d = 1$. Dunque le sole ipersuperficie irriducibile di $\mathbf{A}^1$ sono i punti (che sono gli iperpiani, in questo caso).

   b) $n = \dim \mathbf{A} = 2$. Le ipersuperficie irriducibili si dicono *curve.*

   c) $n = \dim \mathbf{A} = 3$. Le ipersuperficie irriducibili si dicono *superficie.*

4) a) grado $d = 2$: *quadriche* (*coniche* se $n = 2$).

$n = d = 2$: esempi sono dati dall'ellissi di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e la parabola di equazione $y^2 = 2px$ in $\mathbf{E}_2$ complessificato $(a, b, p \neq 0)$.

$n = 3$, $d = 2$: sfere (in $\mathbf{E}_3$ complessificato).

   b) grado $d = 3$: *cubiche.*

   c) grado $d = 4$: *quartiche* (etc.)

5) *Per ogni $n > 1$ ed ogni d, esiste una ipersuperficie irriducibile di grado d in $\mathbf{A}^n$.* Ad esempio, basta considerare l'ipersuperficie di equazione cartesiana $t_1 = f(t_2, \ldots, t_n)$ con f polinomio di grado d. Infatti, se $t_1 - f = gh$, si deve avere $g = g(t_2, \ldots, t_n)$ ed $h = t_1 - q(t_2, \ldots, t_n)$ (a meno di scambio dei nomi e di moltiplicazione per una costante). Ma allora, $t_1 - f = gh = g(t_1 - q) = gt_1 - gq$: ne segue, per l'unicità di scrittura dei polinomi, che $g = 1$.

6) **Coni**. Siano $V \in \mathbf{A}$, $\Gamma \subset \mathbf{A}$. Si dice *cono di vertice* V *e direttrice* Γ lo spazio unione delle rette $\overline{VP}$ congiungenti V ed un qualsiasi punto $P \in \Gamma$:

$$\bigcup_{P\in\Gamma} \overline{VP} = X. \tag{8.7}$$

a) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, siano $V = O$ l'origine, Γ la circonferenza di equazioni $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Un punto $P(\xi,\eta,\zeta)$ appartiene a Γ se e solo se

$$\begin{cases} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1 \\ \xi+\eta+\zeta=1 \end{cases}. \tag{8.8}$$

L'equazione parametrica della retta $\overline{VP}$ risulta essere:

$$\begin{cases} x = \xi\, t \\ y = \eta\, t \\ z = \zeta\, t \end{cases} \tag{8.9}$$

Eliminando i parametri ξ, η, ζ dalle equazioni (8.8), (8.9) si ottiene:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=t^2 \\ x+y+z=t \end{cases}. \tag{8.10}$$

Eliminando ora il parametro t si ricava l'equazione:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2. \tag{8.11}$$

Il cono di vertice O e direttrice Γ si dice *cilindro circolare retto* ed ha pertanto equazione:

$$xy+yz+zx=0. \tag{8.12}$$

Il polinomio $xy+yz+zx$ è irriducibile; altrimenti si fattorizzerebbe come prodotto di fattori lineari. L'assenza di termini quadratici in una singola variabile comporta che x, y, e z compaiono in uno solo dei due fattori. D'altra parte, poiché sono non nulli i termini in xy e xz, signica che un fattore è della forma $ax+d$ e l'altro della forma $b'y+c'z+d'$. Ma questo è assurdo, perché $xy+yz+zx$ contiene un termine non nullo in yz.

b) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, siano $V = (0,0,1)$, Γ l'ellissi di equazioni $\begin{cases} x^2+2y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$. Ragionando analogamente a quanto visto nel punto precedente, si vede facilmente che un punto di coordinate (x,y,z) appartiene al cono di vertice V e direttrice Γ se e solo se soddisfa il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \xi^2+2\eta^2=1 \\ \zeta=0 \\ x=\xi\, t \\ y=\eta\, t \\ z=1+t\,(\zeta-1) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \xi^2+2\eta^2=1 \\ \zeta=0 \\ \frac{x}{t}=\xi \\ \frac{y}{t}=\eta \\ \frac{z-1}{t}+1=\zeta \end{cases}. \tag{8.13}$$

Eliminando i parametri ξ, η, ζ, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{t^2}+2\frac{y^2}{t^2}=1 \\ \frac{z-1}{t}+1=0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2+2y^2=t^2 \\ t=1-z \end{cases} \tag{8.14}$$

Il cono X di vertice V e direttrice Γ ha equazione:

$$x^2+2y^2=(1-z)^2. \tag{8.15}$$

Si verifica facilmente che il polinomio $x^2+2y^2=(1-z)^2$ è irriducibile.

c) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, siano $V = (0,1,1)$, Γ l'iperbole di equazioni $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$. Come negli esempi precedenti, un punto di coordinate (x,y,z) appartiene al cono di vertice V e direttrice Γ se e solo se soddisfa il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \xi^2-\eta^2=1 \\ \zeta=0 \\ x=\xi\, t \\ y=1+t\,(\eta-1) \\ z=1+t\,(\zeta-1) \end{cases} \tag{8.16}$$

o, equivalentemente:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{t}\right)^2-\left(\frac{y-1}{t}+1\right)^2=1 \\ z=1-t \end{cases} \tag{8.17}$$

Eliminando il parametro t si ottiene:

$$\left(\frac{x}{1-z}\right)^2-\left(\frac{y-1}{1-z}+1\right)^2=1. \tag{8.18}$$

Svolgendo i passaggi algebrici l'equazione diviene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{1-z}\right)^2 &= 1 \\ x^2-(y-z)^2 &= (1-z)^2 \\ x^2-y^2-z^2+2yz &= 1+z^2-2z. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Il cono X di vertice V e direttrice Γ è l'ipersuperficie di equazione cartesiana:

$$x^2-y^2-2z^2+2yz+2z-1=0. \tag{8.20}$$

d) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, siano $V=(0,1,0)$, Γ la parabola di equazioni $\begin{cases} z^2=2x \\ y=0 \end{cases}$. Come negli esempi precedenti, un punto di coordinate (x,y,z) appartiene al cono di vertice V e direttrice Γ se e solo se soddisfa il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2\xi=\zeta^2 \\ \eta=0 \\ x=\xi\, t \\ y=1+t\,(\eta-1) \\ z=t\,\zeta \end{cases} \tag{8.21}$$

o, equivalentemente:

$$\begin{cases} 2\frac{x}{t}=\frac{z^2}{t^2} \\ y=1-t \end{cases} \tag{8.22}$$

o, ancora:

$$\begin{cases} 2tx=z^2 \\ t=1-y \end{cases}. \tag{8.23}$$

Il cono di vertice V e direttrice Γ è l'ipersuperficie irriducibile di equazione cartesiana:

$$2(1-y)x=z^2. \tag{8.24}$$

7) **Cilindri**. Siano δ una direzione in $\mathbf{A}^n$ e $\Gamma \subset \mathbf{A}^n$. Il *cilindro di direttrice* Γ e *generatrici* aventi la direzione δ è l'unione, al variare di $P \in \Gamma$, dei punti sulla retta $\overline{P\delta}$ per P di direzione δ. In simboli:

$$X=\bigcup_{P\in\Gamma}\overline{P\delta}. \tag{8.25}$$

a) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, sia δ la direzione individuata dai parametri direttori $(1, 1, 1)$ e sia Γ la parabola di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 3x \end{cases}$.

Un punto $P(x, y, z)$ appartiene al cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni:

$$\begin{cases} \zeta = 0 \\ 3\xi = \eta^2 \\ x = \xi + t \\ y = \eta + t \\ z = \zeta + t \end{cases} \tag{8.26}$$

Eliminando i parametri ξ, η, ζ si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} 3(x - t) = (y - t)^2 \\ z = t \end{cases} . \tag{8.27}$$

Il cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ (detto *cilindro parabolico*) risulta essere l'ipersuperficie di equazione cartesiana:

$$3(x - z) = (y - z)^2. \tag{8.28}$$

Il polinomio $3x - 3z - (y - z)^2$, che è della forma $3x - f(y, z)$ è irriducibile per quanto visto al punto 5).

b) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, sia δ la direzione della retta di equazioni: $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ e sia Γ l'ellissi di equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.
Si verifica facilmente che i parametri direttori di δ sono $(1, 3, 2)$.

Il cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ si dice *cilindro ellittico* e i suoi punti hanno coordinate (x, y, z) soluzione delle equazioni:

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ 2\eta^2 + \zeta^1 = 1 \\ x = \xi + t \\ y = \eta + 3t \\ z = \zeta + 2t \end{cases} \tag{8.29}$$

Eliminando i parametri ξ, η, ζ si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} 2(y-3t)^2+(z-2t)^2=1 \\ x=t \end{cases}. \tag{8.30}$$

Il cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ ammette dunque l'equazione cartesiana:

$$2(y-3x)^2+(z-2x)^2=1. \tag{8.31}$$

c) Nello spazio affine euclideo complessificato di dimensione 3, sia δ la direzione della retta congiungente i punti $P(1,2,0)$ e $Q(1,1,1)$ e sia Γ l'iperbole $\begin{cases} y=0 \\ x^2-2z^2=3 \end{cases}$. I parametri direttori di δ sono $(0,1,-1)$.

Il cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ si dice *cilindro iperbolico* e i suoi punti hanno coordinate (x,y,z) soluzione delle equazioni:

$$\begin{cases} \eta=0 \\ \xi^2-2\zeta^1=3 \\ x=\xi \\ y=\eta+t \\ z=\zeta-t \end{cases} \tag{8.32}$$

Eliminando i parametri ξ, η, ζ si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} x^2-2(z+t)^2=3 \\ y=t \end{cases}. \tag{8.33}$$

Il cilindro di direttrice Γ e generatrici di direzione δ è pertanto la superficie irriducibile di equazione cartesiana:

$$x^2-2(z+y)^2=3. \tag{8.34}$$

8) **Superficie di rotazione nello spazio euclideo E_3 3-dimensionale complessificato**. Siano $\Gamma \subset E_3$ ed r una retta. Si consideri il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r: per ogni $P \in \Gamma$, si consideri il piano π_P per P ed ortogonale ad r e si indichi con $C_P \subset \pi_P$ la circonferenza di centro $\pi_P \cap r$ passante per P. La circonferenza C_P si dice *traiettoria di P nella rotazione*. In simboli:

$$X=\bigcup_{P\in\Gamma} C_P \tag{8.35}$$

a) Siano r l'asse x e Γ l'ellissi di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$. Il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r si dice *iperboloide ellittico*.

Un punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ appartiene a Γ se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni: $\begin{cases} \zeta = 0 \\ \xi^2 - \eta^2 = 1 \end{cases}$. Il piano per P ortogonale ad r ha equazione $x = \xi$ e la circonferenza C_P è descritta da $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ x = \xi \end{cases}$. Il luogo cercato X è descritto dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (x^2 - 1) \tag{8.36}$$

cioé

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1. \tag{8.37}$$

b) Siano Γ come nel punto precedente ed r l'asse y. Il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r si dice *iperboloide iperbolico*.

Se $P(\xi, \eta, \zeta)$ appartiene a Γ il piano per P ortogonale ad r ha equazione $y = \eta$ e la circonferenza C_P è descritta da $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ y = \eta \end{cases}$. Il luogo cercato X è descritto dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + y^2 \tag{8.38}$$

cioé

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1. \tag{8.39}$$

Come di consueto, si verifica che X è una ipersuperficie irriducibile.

c) Siano r l'asse x e Γ la parabola di equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases}$. Il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r si dice *paraboloide ellittico*.

Un punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ appartiene a Γ se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni: $\begin{cases} \zeta = 0 \\ \eta^2 = 2\xi \end{cases}$. Il piano per P ortogonale ad r ha equazione $x = \xi$ e la circonferenza C_P è descritta da $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ x = \xi \end{cases}$. Il luogo cercato X

è descritto dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x \tag{8.40}$$

cioé

$$y^2 + z^2 = 2x. \tag{8.41}$$

Il polinomio $2x - y^2 - z^2$ è irriducibile perché è della forma $2x - f(y, z)$.

d) **Regola**. Siano r l'asse z e sia $f(y, z) = 0$ l'equazione di una curva Γ in $\mathbf{A}^2$ (identificato con il piano $x = 0$). Si vuole studiare il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r.

Un punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ appartiene a Γ se e solo se le sue coordinate soddisfano le equazioni: $\begin{cases} \xi = 0 \\ f(\eta, \zeta) = 0 \end{cases}$. Il piano per P ortogonale ad r ha equazione $z = \zeta$ e la circonferenza C_P è descritta da $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ z = \zeta \end{cases}$. Il luogo cercato X è descritto dall'equazione:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{8.42}$$

a) Siano r l'asse z e Γ l'ellissi di equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$. Il luogo X descritto dalla rotazione di Γ intorno ad r si dice *ellissoide di rotazione*. Esso è descritto dall'equazione:

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + 2z^2 = 1 \tag{8.43}$$

cioé

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1. \tag{8.44}$$

Si verifica facilmente che X è una ipersuperficie irriducibile.

8.3 Equazione di una ipersuperficie.

Sia k campo algebricamente chiuso.

Proposizione 8.3.1 *Due polinomi irriducibili f e $g \in k[\underline{t}]$ sono equazioni della stessa ipersuperficie irriducibile X se e solo esiste $\rho \in k$ non nullo tale che $f = \rho g$.*

DIM. L'implicazione $\Leftarrow$ non richiede giustificazione.

Per dimostrare l'implicazione $\Rightarrow$ verrà usato il seguente teorema:

Teorema 8.3.2 Teorema degli zeri di Hilbert. *Siano dati dei polinomi* $f_1, \ldots, f_k, g \in k[\underline{t}]$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* g *si annulli in ogni soluzione del sistema* $f_1 = \ldots = f_k = 0$ *è che esistano* $n \in \mathbf{N}$ *e* k *polinomi* $A_1, \ldots, A_k$ *tali che:*

$$g^n = A_1 f_1 + \ldots + A_k f_k. \tag{8.45}$$

Nelle ipotesi della proposizione, deve pertanto esistere $n \in \mathbf{N}$, $A \in k[\underline{t}]$ tali che:

$$g^n = Af\,. \tag{8.46}$$

In particolare, poiché f è irriducibile, f divide g. Si ottiene dunque la tesi, per l'irriducibilità di g. $\triangle$

In base alla precedente proposizione si può dare la seguente:

Definizione 8.3.3 *Sia* X *una ipersuperficie irriducibile. Si definisce* grado di X *(in simboli* deg X*) il grado di una equazione cartesiana (irriducibile) di* X.

Siano ora $\mathbf{A}$ uno spazio affine reale ed $\mathbf{A_C}$ la sua complessificazione.

Definizione 8.3.4 *Una ipersuperficie irriducibile* $X \in \mathbf{A_C}$ *si dice* ipersuperficie irriducibile reale *se e solo se* $X = \overline{X}$.

Osservazione 8.3.5 X *è reale se e solo se* X *ha equazione proporzionale ad un polinomio a coefficienti reali.*

DIM. Basta dimostrare l'implicazione $\Rightarrow$). Se $f = 0$ è equazione di X, allora $\overline{X}$ ha equazione $\overline{f}$. Poichè $X = \overline{X}$ per ipotesi, per la proposizione precedente deve esistere una costante $\rho \in \mathbf{C}$ non nulla con

$$f = \rho \overline{f}\,. \tag{8.47}$$

Se $\rho = -1$, allora $f = ih$ è prodotto dell'unità immaginaria i per un polinomio h a coefficienti reali, come si voleva.

Altrimenti, si ponga $F = \overline{\rho} f + \rho \overline{f}$. Si ha:

$$\overline{F} = \overline{(\overline{\rho} f + \rho \overline{f})} = \rho \overline{f} + \overline{\rho} f = F \tag{8.48}$$

inoltre, per (8.47):

$$F = \overline{\rho} f + \rho \overline{f} = \overline{\rho} f + f = f(1 + \overline{\rho}) \tag{8.49}$$

e dunque, essendo $1 + \overline{\rho} \neq 0$ per le ipotesi fatte, $F = 0$ è una equazione di X. △

8.4 Definizione generale.

Sia k campo algebricamente chiuso.

Definizione 8.4.1 *Una* ipersuperficie *X di $\mathbf{A}^n$ è una combinazione formale:*

$$X = \mu_1 X_1 + \ldots + \mu_h X_h \tag{8.50}$$

con $\mu_1, \ldots, \mu_h$ interi positivi e $X_1, \ldots, X_h$ ipersuperficie irriducibili. L'ipersuperficie X_i $(i = 1, \ldots, n)$ si dice componente *di X di* molteplicità *μ_i. La somma $\sum_i \mu_i deg X_i$ si dice* grado *di X. L'unione $\bigcup_i X_i$ si dice* sostegno *di X. Infine, X si dice* ridotta *se $\mu_i = 1\ \forall\, i$ e si dice* riducibile *se $\sum \mu_i > 1$.*

Introdotto un riferimento $\mathcal{R}$, sia $f_i = 0$ un'equazione di $X_i\ \forall\, i$. Si dice *equazione* di X l'equazione:

$$f = f_1^{\mu_1} \cdots f_h^{\mu_h} = 0\,. \tag{8.51}$$

Viceversa, ogni equazione $f = 0$ con $f \in k[\underline{t}]$, può essere interpretata come equazione di una ipersuperficie: se $f = f_1^{\mu_1} \cdots f_h^{\mu_h}$ è una fattorizzazione di f in fattori irriducibili (con f_i ed f_j non proporzionali tra loro $\forall\, i \neq j$), f è l'equazione dell'ipersuperficie $\mu_1 X_1 + \ldots + \mu_h X_h$, indicando con X_i l'ipersuperficie irriducibile di equazione $f_i = 0$.

Osservazione 8.4.2 a) deg X = grado di una sua equazione f.

b) f è univocamente individuato a meno di prodotto per una costante non nulla.

c) La definizione di ipersuperficie è invariante per cambiamenti di riferimento.

Esempio 8.4.3 Come di consueto, si indicano con n la dimensione dello spazio affine e con d il grado dell'ipersuperficie X.

a) $n = 1$: ogni polinomio è della forma $f(t) = c\prod_{i=1}^{h}(x - a_i)^{\mu_i}$. La corrispondente ipersuperficie è $X = \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_h P_n$ ove si indichi con $P_i = P(a_i)$ il punto di coordinata a_i nel riferimento fissato $(i = 1, \ldots, h)$.

b) $d = 2$: le *quadriche riducibili* (*coniche* se $n = 2$) sono composte da due iperpiani distinti di molteplicità 1 o da un iperpiano con molteplicità 2.

c) $d = 3$: per le componenti di una *cubica riducibile* possono essere:

i) una quadrica ed un iperpiano, con molteplicità 1, non tangenti tra loro;

ii) una quadrica ed un iperpiano, con molteplicità 1,

iii) una quadrica ed un iperpiano, con molteplicità 1, tra loro tangenti;

iv) tre iperpiani, con molteplicità 1, senza intersezione comune;

v) tre iperpiani, con molteplicità 1, che si intersecano in un punto,

vi) un iperpiano con molteplicità 2 ed un altro iperpiano con molteplicità 1;

vii) un iperpiano con molteplicità 3.

Osservazione 8.4.4 *Se X è una ipersuperficie e Y è una ipersuperficie irriducibile con $Y \subset X$, allora Y è una componente di X.*

Dim. Siano $f = 0$ una equazione di X e $g = 0$ una equazione di Y. Per il teorema degli zeri di Hilbert, esistono n, A con $f^n = Ag$. Essendo irriducibile, g divide f, come si voleva provare. $\triangle$

Corollario 8.4.5 *Una ipersuperficie quadrica o cubica è riducibile se e solo se contiene un iperpiano.*

Osservazione 8.4.6 Utilizzando il precedente corollario, è facile mostrare l'irriducibilità delle ipersuperficie X studiate negli esempi illustrati nel paragrafo 2. E' sufficiente mostrare che l'intersezione di X con un opportuno piano non contiene rette.

Esercizi.

Studiare le eventuali singolarità delle ipersuperficie aventi le seguenti equazioni:

a) $x_0 x_2^2 = x_1^3 - x_1 x_0^2$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$;

b) $x_0x_2^2 = x_1^3 + x_1^2x_0 + 3x_1x_0^2$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$;

c) $x_0x_3 = x_1x_2$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$;

d) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$;

e) $x_0^3 = x_1^3 + x_2^3$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (è non singolare);

f) $x_0^2x_2^3 = x_1^5 - x_0^5$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (è non singolare per $x_0 \neq 0$);

g) $x_0^3x_2 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 = 0$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (è non singolare).

9) Sia X la curva di equazione $y^2 = h(x)$ in $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \{x_0 = 0\}$, ove $h(x)$ è un polinomio a radici distinte di grado n nella indeterminata x, $x = (x_1/x_0)$, $y = (x_2/x_0)$; mostrare che X è liscia in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus \{x_0 = 0\}$.

10) Determinare lo spazio tangente le seguenti curve di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ nei punti assegnati:

a) $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_1x_0^2$ in $P(1,1,0)$;

b) $x_2^5 - x_0^2x_1^2x_2 - x_2^2x_0^3 = 0$ in $(1,0,0)$ (ha un punto 3-plo nell'origine, con tangenti $y = 0$, $x = y$);

11) Si indichi con π_∞ la retta di equazione $\{x_0 = 0\}$ in $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Scrivere l'equazione omogenea della curva proiettiva X che in $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus \pi_\infty$ ha la seguente equazione affine; studiare inoltre i punti di $\pi_\infty \cap X$, discutendone l'eventuale singolarità e determinandone la molteplicità nell'intersezione e le tangenti:

a) $x^5 - x^3y^2 + xy^3 - y^3 + 2x - y = 0$: i punti in π_∞ sono $Y_\infty(0,0,1)$ con molteplicità di intersezione 3 con π_∞ (è un punto doppio per X), $Q_\infty(0,1,-1)$, $P_\infty(0,1,1)$ (è un punto semplice per X con tangente $y = x + (1/2)$).

b) $x(x^2+y^2)-y^2 = 0$: è una curva liscia fuori dall'origine che è punto doppio con tangente $y = 0$ contata due volte. I punti in π_∞ sono $Y_\infty(0,0,1)$ con tangente $x - 1 = 0$ e i punti $(0, x, \pm ix)$.

c) $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 0$: origine singolare; i punti in π_∞ sono $Y_\infty(0,0,1)$ e $X_\infty(0,0,1)$, che sono doppi.

d) $y^7 = x^2(x-1)$: punto doppio nell'origine, con tangente $x = 0$.

e) $xy^2 - y^3 + x = 0$: l'origine è punto semplice con tangente di flesso $x = 0$; i punti in π_∞ sono $X_\infty(0,0,1)$ (con molteplicità di intersezione 2 e tangenti $y = \pm i$) ed il punto $(0,1,1)$ (con tangente $y = x$).

f) $(x+y+1)^3-27xy=0$: $P_\infty(0,1,-1)$ è semplice con tangente di flesso π_∞ e molteplicità di intersezione 3; X ammette come unico punto doppio il punto $A(1,1) \in \mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus \pi_\infty$ e, studiando localmente la curva nelle coordinate $X = x-1$ e $Y = y-1$, si mostra che le tangenti ad X in A hanno equazione $Y = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} X$.

12) In ciascuno degli esempi del punto precedente, studiare se l'origine è un punto singolare per X e determinarne le tangenti. Studiare inoltre la molteplicità di intersezione nell'origine di X con le rette $x = y$, $x = 0$ rispettivamente.

13) Determinare quali, tra le coniche di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ aventi le seguenti equazioni, sono singolari:

a) $x_2^2 = x_0^2$;

b) $4x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$;

c) $x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_0^2 = 0$;

d) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 = 0$

14) Determinare la tangente in $(1,0,0)$ alla conica X di equazione $x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 = 0$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$; determinare inoltre le tangenti ad X che passano per $P(1,2,3)$ e la polare di P rispetto ad X.

Capitolo 9

Ipersuperficie proiettive

9.1 Ipersuperficie proiettive.

Sia $\mathbf{P}^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n su un campo k algebricamente chiuso (ad esempio, $k = \mathbf{C}$) e sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbf{P}^n$. Si denotano con $\varphi : \mathbf{P}^n(k) \to \mathbf{P}^n$ la proiettività che definisce il riferimento e con $P = P[x_0, \ldots, x_n] = \varphi[x_0, \ldots, x_n]$ il punto in $\mathbf{P}^n$ di coordinate omogenee $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ nel riferimento $\mathcal{R}$.

Definizione 9.1.1 *Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbf{P}^n$ si dice* ipersuperficie irriducibile *di $\mathbf{P}^n$ se esiste un polinomio irriducibile omogeneo $f(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ tale che:*

$$\begin{aligned} X &= \{P(\mathbf{a}) : f(\mathbf{a}) = 0\} \qquad (9.1) \\ &= \{P(a_0, \ldots, a_n) : f(a_0, \ldots, a_n) = 0\}. \end{aligned}$$

Osservazione 9.1.2 *a) Sia $1 \leq d \in \mathbf{N}$. Un polinomio $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ è omogeneo di grado d se e solo se $f(t\mathbf{x}) = t^d f(\mathbf{x})$ per ogni scalare non nullo t. In particolare, è ben posta la definizione di ipersuperficie irriducibile proiettiva.*
b) I fattori di un polinomio omogeneo f (non nullo) sono anch'essi omogenei.

Dim.

a) Basta dimostrare l'implicazione $\Leftarrow$. Sia $f = f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0$ una scrittura di f come somma delle componenti omogenee f_i di grado i. Allora, per ipotesi,

$$f(t\mathbf{x}) = t^d f(\mathbf{x}) = t^d f_d(\mathbf{x} + t^d f_{d-1}(\mathbf{x}) + \ldots + t^d f_1(\mathbf{x}) + t^d f_0. \qquad (9.2)$$

D'altra parte, per l'omogeneità delle componenti:

$$f(t\mathbf{x}) = t^d f_d(\mathbf{x}) + t^{d-1} f_{d-1}(\mathbf{x}) + \ldots + t f_1(\mathbf{x}) + f_0 \tag{9.3}$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ricava:

$$t^d(f_d + f_{d-1} + \ldots + f_0) = t^{d-1} f_{d-1} + \ldots + t f_1 + f_0 \tag{9.4}$$

e, in particolare, deve essere $f_0 = 0$, come anche $0 = f_1 = \ldots = f_{d-1}$.

b) Sia $f = gh$ una fattorizzazione di f e si indichino con d, a, b i gradi di f, g, h rispettivamente. Si supponga per assurdo che g non sia omogeneo e si considerino le decomposizioni di g ed h come somma di componenti omogenee

$$\begin{aligned} g &= g_a + \ldots + g_{a'} & \qquad a' < a,\ g_a \neq 0 \neq g_{a'} \\ h &= h_b + \ldots + h_{b'} & \qquad b' \leq b,\ h_b \neq 0 \neq h_{b'} \end{aligned} \tag{9.5}$$

ove $g_{a'}, h_{b'}$ siano le componenti di grado minimo che in esse compaiono, rispettivamente. Il prodotto f di g ed h si scrive pertanto come:

$$f = g_a h_b + (g_a h_{b-1} + g_{a-1} h_b) + \ldots + g_{a'} h_{b'}; \tag{9.6}$$

per l'omogeneità di $f = f_d$, deve essere $a + b = d$ e devono valere le relazioni:

$$\begin{aligned} f &= g_a h_b \\ 0 &= g_a h_{b-1} + g_{a-1} h_b \\ &\ldots \\ 0 &= g_{a'} h_{b'}; \end{aligned} \tag{9.7}$$

ma l'ultima uguaglianza è incompatibile con l'ipotesi assurda che $g_{a'}$ e $h_{b'}$ siano non nulli.

△

L'espressione $f(\mathbf{x}) = f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ si dice *equazione cartesiana* dell'ipersuperficie nel riferimento $\mathcal{R}$.

Proposizione 9.1.3 *Siano $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ due polinomi omogenei irriducibili. Allora $f = 0$ e $g = 0$ sono equazioni della stessa ipersuperficie irriducibile proiettiva X $\Leftrightarrow$ esiste $\rho \in k \setminus \{0\}$ con $f = \rho g$.*

Dim. Si applica il teorema degli zeri. △

Osservazione 9.1.4 *La definizione di ipersuperficie non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.*

Dim. La dimostrazione è analoga a quella vista nel caso delle ipersuperficie affini. Sia $\mathcal{R}'$ un altro riferimento di $\mathbf{A}$ e si denoti con $\mathbf{t}' = (x'_0, \ldots, x'_n)^t$ il vettore colonna delle coordinate omogenee di un punto nel riferimento $\mathcal{R}'$. Si scrivano inoltre come vettore colonna le coordinate omogenee $\mathbf{x}$ nel riferimento $\mathcal{R}$. Per le formule del cambiamento di riferimento (cf. cap. 4), esiste una matrice quadrata $\mathbf{A}$ non singolare di ordine $n+1$ tale che

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \qquad\qquad |\mathbf{A}| \neq 0; \tag{9.8}$$

per esteso:

$$\begin{cases} x_0 = a_{00}x'_0 + \ldots + a_{0n}x'_n \\ \cdots \\ x_n = a_{n0}tx'_0 + \ldots + a_{nn}x'_n. \end{cases} \tag{9.9}$$

La sostituzione lineare nella variabile $\sigma : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}'$ induce, nello spazio vettoriale dei polinomi, l'applicazione:

$$\begin{array}{rcl} k[\mathbf{x}] & \to & k[\mathbf{x}'] \\ f(\mathbf{x}) & \mapsto & f_\sigma(\mathbf{x}') = f(\mathbf{A}\mathbf{x}'). \end{array} \tag{9.10}$$

Si osservi che:

1) Se f è omogeneo, anche f_σ è omogeneo dello stesso grado;

2) l'applicazione $f \mapsto f_\sigma$ è un isomorfismo;

3) f è irriducibile se e solo se f_σ è irriducibile.

La dimostrazione dell'invarianza della definizione di ipersuperficie dalla scelta del riferimento si conclude come nel caso affine. △

Osservazione 9.1.5 Analogamente all'osservazione precedente, si mostra l'*invarianza della definizione di ipersuperficie per proiettività biiettive*. Si osservi in particolare che *resta invariato il grado dell'equazione cartesiana*, che viene detto *grado* dell'ipersuperficie.

9.2 Esempi.

Si denoti con d il grado dell'equazione cartesiana f di una ipersuperficie irriducibile X di $\mathbf{P}^n$.

1) $n = 1$. Si vuole mostrare che ogni polinomio omogeneo non nullo in $k[x_0, x_1]$ si fattorizza come prodotto di fattori lineari (necessariamente omogenei, per quanto visto). Sia $f(x_0, x_1)$ un polinomio omogeneo di grado $d > 1$; raccogliendo a fattor comune la massima potenza di x_0, è possibile scrivere $f(x_0, x_1) = c\, x_0^{d-\alpha}\, g(x_0, x_1)$ con

$$g(x_0, x_1) = a_0 x_0^\alpha + a_1 x_0^{\alpha-1} x_1 + \ldots + a_{\alpha-1} x_0 x_1^{\alpha-1} + x_1^\alpha \tag{9.11}$$

polinomio omogeneo di grado α non divisibile per x_0 e coefficiente di x_1^α uguale ad 1. D'altra parte, $g(x_0, x_1) = x_0^\alpha g(1, \frac{x_1}{x_0})$ e $g(1, t)$, in quanto polinomio in una variabile, si fattorizza come prodotto di fattori lineari:

$$g(1, t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{\alpha-1} t^{\alpha-1} + t^\alpha = \prod_{i=1}^{h} (t - t_i)^{\mu_i} \qquad \sum_{i=1}^{h} \mu_i = \alpha \tag{9.12}$$

La fattorizzazione di $g(x_0, x_1)$ si trova osservando che:

$$\begin{aligned} g(x_0, x_1) &= x_0^\alpha g(1, \frac{x_1}{x_0}) = x_0^\alpha \prod_{i=1}^{h} (\frac{x_1}{x_0} - t_i)^{\mu_i} = \\ &= x_0^\alpha \prod_{i=1}^{h} \frac{(x_1 - t_i x_0)^{\mu_i}}{x_0^{\mu_i}} = \\ &= \prod_{i=1}^{h} (x_1 - t_i x_0)^{\mu_i}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Se ne ricava la fattorizzazione cercata per f:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1) &= c\, x_0^{d-\alpha} \prod_{i=1}^{h} (x_1 - t_i x_0)^{\mu_i} = \\ &= \prod_{i=1}^{k} (b_i x_1 - c_i x_0)^{\nu_i} \qquad b_i, c_i \in k, \sum_{i=1}^{k} \nu_i = d. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Un polinomio omogeneo non costante è dunque irriducibile se e solo se ha grado $d = 1$. Dunque le sole ipersuperficie irriducibile di $\mathbf{P}^1$ sono i punti (che sono gli iperpiani, in questo caso).

2) $n = 2$. Le ipersuperficie irriducibili si dicono *curve*.

3) $n = 3$. Le ipersuperficie irriducibili si dicono *superficie*.

4) grado $d = 1$: X è un iperpiano.

5) grado $d = 2$: *quadriche* (*coniche* se $n = 2$).

6) grado $d = 3$: *cubiche*.

7) grado $d = 4$: *quartiche* (etc.)

8) *Per ogni $n > 1$ ed ogni d, esiste una ipersuperficie irriducibile di grado d in $\mathbf{P}^n$.*

   DIM. Ad esempio, basta considerare l'ipersuperficie di equazione cartesiana $x_0 x_1^{d-1} = f(x_1, \ldots, x_n)$ con $f(x_1, \ldots, x_n)$ omogeneo di grado d. △

9) Si consideri la complessificazione $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ di $\mathbf{P}^n_{\mathbf{R}}$. Una ipersuperficie irriducibile X di $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ si dice *reale* se $X = \overline{X}$.

   Proposizione 9.2.1 *Una ipersuperficie X di $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ è reale $\Leftrightarrow$ ammette una equazione a coefficienti reali.*

   DIM. Completamente analoga al caso affine. △

9.3 Definizione generale.

Sia k campo algebricamente chiuso.

Definizione 9.3.1 *Una* ipersuperficie *X di $\mathbf{P}^n$ è una combinazione formale:*

$$X = \mu_1 X_1 + \ldots + \mu_h X_h \tag{9.15}$$

con $\mu_1, \ldots, \mu_h$ interi positivi e $X_1, \ldots, X_h$ ipersuperficie irriducibili proiettive. L'ipersuperficie X_i $(i = 1, \ldots, n)$ si dice componente *di X di* molteplicità *μ_i. La somma $\sum_i \mu_i deg X_i$ si dice* grado *di X. L'unione $\bigcup_i X_i$ si dice* sostegno *di X. Infine, X si dice* ridotta *se $\mu_i = 1\ \forall\, i$ e si dice* riducibile *se $\sum \mu_i > 1$.*

Introdotto un riferimento $\mathcal{R}$, sia $f_i = 0$ un'equazione di $X_i\ \forall\, i$. Si dice *equazione* di X l'equazione:

$$f = f_1^{\mu_1} \cdots f_h^{\mu_h} = 0\,. \tag{9.16}$$

Viceversa, ogni equazione $f = 0$ con $f \in k[\mathbf{x}]$, può essere interpretata come equazione di una ipersuperficie: se $f = f_1^{\mu_1} \cdots f_h^{\mu_h}$ è una fattorizzazione di f in fattori irriducibili (con f_i ed f_j non proporzionali tra loro $\forall\, i \neq j$), f è l'equazione dell'ipersuperficie $\mu_1 X_1 + \ldots + \mu_h X_h$, indicando con X_i l'ipersuperficie irriducibile di equazione $f_i = 0$.

Osservazione 9.3.2 a) $\deg X =$ grado di una sua equazione f.

b) f è univocamente individuato a meno di prodotto per una costante non nulla.

c) La definizione di ipersuperficie è invariante per cambiamenti di riferimento.

Esempio 9.3.3 Come di consueto, si indicano con n la dimensione dello spazio affine e con d il grado dell'ipersuperficie X.

a) $n = 1$: ogni polinomio è della forma $f(x_0, x_1) = \prod_{i=1}^{k} (b_i x_1 - c_i x_0)^{\nu_i}$. La corrispondente ipersuperficie è $X = \mu_1 P_1 + \ldots + \mu_h P_n$ ove si indichi con $P_i = [b_i, c_i]$ il punto di coordinate omogenee (b_i, c_i) nel riferimento fissato ($i = 1, \ldots, k$).

b) $d = 2$: le *quadriche riducibili* (*coniche* se $n = 2$) sono composte da due iperpiani distinti di molteplicità 1 o da un iperpiano con molteplicità 2.

Osservazione 9.3.4 *Se X è una ipersuperficie e Y è una ipersuperficie irriducibile con $Y \subset X$, allora Y è una componente di X.*

DIM. Dimostrazione come nel caso affine. $\triangle$

Corollario 9.3.5 *Una ipersuperficie quadrica o cubica è riducibile se e solo se contiene un iperpiano.*

9.4 Totalità delle ipersuperficie di grado d di $\mathbf{P}^n$.

Fissato un numero naturale $d \geq 1$, si consideri l'insieme delle ipersuperficie di grado d in $\mathbf{P}^n$, indicato col simbolo:

$$\Sigma_{n,d} = \{\text{ipersuperficie di grado } d \text{ di } \mathbf{P}^n\}. \tag{9.17}$$

Fissato un riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbf{P}^n$ ed indicato con $k[x_0, \ldots, x_n]_d$ il k-spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d in $k[x_0, \ldots, x_n]$, resta individuata una applicazione naturale biiettiva che associa ad ogni ipersuperficie l'insieme delle sue equazioni:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{\mathcal{R}}: & \Sigma_{n,d} & \to & \mathbf{P}(k[x_0, \ldots, x_n]_d) \\ & X & \mapsto & [f] \text{ con } f = 0 \text{ equazione di } X \text{ in } \mathcal{R}. \end{array} \tag{9.18}$$

La biiezione $\varphi_{\mathcal{R}}$ induce su $\Sigma_{n,d}$ una struttura di spazio proiettivo di dimensione

$$N_{n,d} = \begin{pmatrix} d+n \\ n \end{pmatrix} - 1\,. \tag{9.19}$$

Osservazione 9.4.1 *La struttura di spazio proiettivo indotta su $\Sigma_{n,d}$ non dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R}$, cioè, se $\mathcal{R}'$ è un altro riferimento di $\mathbf{P}^n$, esiste una proiettività biiettiva ψ che fa commutare il diagramma:*

$$\begin{array}{ccl} \Sigma_{n,d} & \overset{\varphi_{\mathcal{R}}}{\to} & \mathbf{P}(k[x_0,\ldots,x_n]_d) \\ & \varphi_{\mathcal{R}'} \searrow & \downarrow \psi \\ & & \mathbf{P}(k[x'_0,\ldots,x'_n]_d) \end{array} \tag{9.20}$$

Dim. Come precedentemente osservato, il cambio di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$ induce un isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & k[x_0,\ldots,x_n]_d & \to & k[x'_0,\ldots,x'_n]_d \\ & f(\underline{x}) & \mapsto & f_\sigma(\mathbf{x}') = f(\mathbf{A}\mathbf{x}'). \end{array} \tag{9.21}$$

Sia ora $X \in \Sigma_{n,d}$ e sia $\varphi_{\mathcal{R}}(X) = [f(\mathbf{x})]$; allora $\varphi_{\mathcal{R}'}(X) = [f(\mathbf{A}\mathbf{x}')] = [f_\sigma(\mathbf{x}')]$. La proiettività ψ associata a σ soddisfa dunque le richieste. △

Definizione 9.4.2 *Un sottospazio proiettivo di dimensione r $\Sigma \subset \Sigma_{n,d}$ si dice* sistema lineare di dimensione r di ipersuperficie di grado d di $\mathbf{P}^n$. *Il sistema si dice brevemente* fascio *se $r = 1$, e* rete *se $r = 2$.*

Sia Σ un sistema lineare di dimensione r; $r+1$ ipersuperficie $X_0,\ldots,X_r \in \Sigma$, che siano indipendenti come punti di Σ, generano dunque Σ e la scelta $\{f_0,\ldots,f_r\}$ di una equazione per ciascuna di esse in un riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbf{P}^n$ fornisce un sistema di riferimento per Σ: l'equazione f in $\mathcal{R}$ di una ipersuperficie X di Σ è della forma:

$$f = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_r f_r \tag{9.22}$$

con $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r) \in k^{r+1}$ individuato a meno di moltiplicazione per una costante non nulla; $(\lambda_0,\ldots,\lambda_r)$ si dicono le coordinate di X. Viceversa, ogni ipersuperficie con equazione della forma (9.22) appartiene a Σ.

Definizione 9.4.3 *Siano $P \in \mathbf{P}^n$ un punto e $\Sigma \subset \Sigma_{n,d}$ un sistema lineare di ipersuperficie di dimensione $r \geq 0$. Si pone:*

$$\Sigma(-P) = \{X \in \Sigma : \; P \in X\} \tag{9.23}$$

Lemma 9.4.4 *$\Sigma(-P)$ è ancora un sistema lineare (contenuto in Σ), e si presenta necessariamente uno dei due casi seguenti:*

a) $\Sigma(-P) = \Sigma$, e in tal caso P si dice un punto base *di Σ;*

b) $\Sigma(-P) \neq \Sigma$, e $\dim \Sigma(-P) = r - 1$.

DIM. Siano $X_0, \ldots, X_r \in \Sigma$ ipersuperficie indipendenti e $f_0, \ldots, f_r$ loro equazioni in $\mathcal{R}$, rispettivamente. Una qualsiasi ipersuperficie X di Σ ha equazione della forma $f = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_r f_r$. L'ipersuperficie X appartiene a $\Sigma(-P)$ se e solo se $P \in X$, cioè se e solo se $f(P) = \lambda_0 f_0(P) + \ldots + \lambda_r f_r(P) = 0$. Allora $\Sigma(-P) = \Sigma$ se e solo se $f_i(P) = 0 \; \forall \, i = 0, \ldots, r$; altrimenti, $\Sigma(-P)$ è un iperpiano in Σ. △

Osservazione 9.4.5 *L'insieme*

$$\mathcal{B}_\Sigma = \{P \in \mathbf{P}^n |\, P \text{ punto base di } \Sigma\} \tag{9.24}$$

dei punti base di un sistema lineare Σ è contenuto propriamente in $\mathbf{P}^n$.

Iterando il procedimento, si pone la seguente:

Definizione 9.4.6 *Dato un sistema lineare $\Sigma \subset \Sigma_{n,d}$ di dimensione r e dati dei punti distinti $P_1, \ldots, P_h$, si definisce:*

$$\Sigma(-P_1 - \ldots - P_h) = \{X \in \Sigma : \, P_1, \ldots, P_h \in X\}. \tag{9.25}$$

Risulta:

Lemma 9.4.7 *a) Se $h \leq r + 1$, allora* $\dim \Sigma(-P_1 - \ldots - P_h) \geq r - h$.
b) Se $h \leq r + 1$, esistono opportuni punti $P_1, \ldots, P_h$ tali che $\dim \Sigma(-P_1 - \ldots - P_h) \geq r - h$.

DIM. a) Non presenta difficoltà.
b) Si dimostra per induzione, ricordando l'osservazione (9.4.5). △

Corollario 9.4.8 *Si consideri un sistema lineare $\Sigma \subseteq \Sigma_{n,d}$ di dimensione r. Allora, comunque fissati dei punti distinti $P_1, \ldots, P_r$, esiste una ipersuperficie X di Σ con $P_1, \ldots, P_r \in X$ e tale X è unica se $P_1, \ldots, P_r$ sono "sufficientemente generali". Inoltre, dati dei punti $P_1, \ldots, P_{r+1}$ "sufficientemente generali", non esiste X di Σ con $P_1, \ldots, P_{r+1} \in X$.*

Si osservi che il precedente corollario si applica, in particolare, quando $\Sigma = \Sigma_{n,d}$.

9.5 Ipersuperficie affini e proiettive.

Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione n su un campo k algebricamente chiuso. Il completamento proiettivo $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ di $\mathbf{A}$ è uno spazio proiettivo di dimensione n su k; si denoti con $\pi_\infty = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \setminus \mathbf{A}$ l'iperpiano dei punti impropri (= direzioni), detto iperpiano improprio.

La scelta di un riferimento affine $\mathcal{R}$ di $\mathbf{A}$ definisce un corrispondente riferimento proiettivo $\mathcal{R}_{\mathbf{P}}$ in $\mathbf{P}(\mathbf{A})$: un punto $P(t_1, \ldots, t_n)$ di $\mathbf{A}$ di coordinate $(t_1, \ldots, t_n)$ in $\mathcal{R}$ ha coordinate proiettive $[x_0, \ldots, x_n]$ con $t_i = \frac{x_i}{x_0}$, $x_0 \neq 0$, in $\mathcal{R}_{\mathbf{P}}$; una direzione δ di parametri direttori $(a_1, \ldots, a_n)$ ha coordinate proiettive $[0, a_1, \ldots, a_n]$, così π_∞ ha equazione $x_0 = 0$.

Viceversa, dati uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ su k ed un suo iperpiano π, allora $\mathbf{A} = \mathbf{P}^n \setminus \pi$ ha una naturale struttura di spazio affine tale che $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^n$, $\pi_\infty = \pi$.

Definizione 9.5.1 *Sia $X \subset \mathbf{A}$ una ipersuperficie di grado d, di equazione $f(t_1, \ldots, t_n) = 0$ in $\mathcal{R}$. Si definisce* chiusura proiettiva di X *l'ipersuperficie*

$$\overline{X} \subset \mathbf{P}(\mathbf{A}) \tag{9.26}$$

definita in $\mathcal{R}_{\mathbf{P}}$ dall'equazione $f_h(x_0, \ldots, x_n) = 0$, dove $f_h(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$.

Osservazione 9.5.2 a) f_h è omogeneo di grado d, essendo:

$$f_h(tx_0, \ldots, tx_n) = t^d x^d f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) = t^d f_h(x_0, \ldots, x_n) \tag{9.27}$$

b) f_h non è divisibile per x_0.

c) L'operatore di omogeneizzazione:

$$\begin{array}{rccc} h: & k[t_1, \ldots, t_n] & \to & k[x_0, \ldots, x_n] \\ & f(t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & f_h(x_0, \ldots, x_n) \end{array} \tag{9.28}$$

è iniettivo e conserva il prodotto, cioè $(fg)_h = f_h g_h$. Quindi,

$$f = f_1^{\mu_1} \cdots f_m^{\mu_m} \qquad \Rightarrow \qquad f_h = f_{1,h}^{\mu_1} \cdots f_{m,h}^{\mu_m}. \tag{9.29}$$

Dunque, $\overline{X}$ *è un'ipersuperficie, ancora di grado d, non contenente* π_∞.

Viceversa, sia $Y \subset \mathbf{P}(\mathbf{A})$ una ipersuperficie non contenente π_∞ (cioè x_0 non divide il polinomio omogeneo $f(x_0, \ldots, x_n)$ che dà l'equazione di Y). Allora $Y \setminus (\pi_\infty \cap Y) \subset \mathbf{P}(\mathbf{A}) \setminus \pi_\infty = \mathbf{A}$ è sostegno della ipersuperficie affine X_Y di equazione $f(1, t_1, \dots, t_n) = 0$ che ha ancora grado d (perché x_0 non divide f). Inoltre:

$$Y = \overline{X_Y} \tag{9.30}$$

perché:

$$x_0^d f(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = x_0^d f(\frac{x_0}{x_0}, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = x_0^d \frac{1}{x_0^d} f(x_0, \dots, x_n) = f(x_0, \dots, x_n). \tag{9.31}$$

Si osservi che, *se Y contiene π_∞ con molteplicità μ, l'ipersuperficie X_Y di equazione $f(1, t_1, \dots, t_n) = 0$ di grado $d - \mu$ e $\overline{X}_Y = Y - \mu\pi_\infty$.*

Si osservi ancora che, indicato con h' il morfismo:

$$\begin{array}{rccc} h': & k[x_0, \dots, x_n] & \to & k[t_1, \dots, t_n] \\ & f(x_0, \dots, x_n) & \mapsto & f(1, t_1, \dots, t_n) \end{array} \tag{9.32}$$

si ha:

$$\begin{array}{l} h' \circ h = id \\ h \circ h' = \text{divisione per la massima potenza di } x_0. \end{array} \tag{9.33}$$

Inoltre, poiché sia h che h' preservano la fattorizzazione, *se X è una ipersuperficie affine e $X = \mu_1 X_1 + \ldots + \mu_n X_n$ è la sua decomposizione in componenti irriducibili distinte, allora $\overline{X} = \mu_1 \overline{X}_1 + \ldots + \mu_n \overline{X}_n$. Se invece $Y = \mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_n Y_n + \mu\pi_\infty$ è una ipersuperficie proiettiva ($\pi_\infty \not\subset Y_i$), si ha $X_Y = \mu_1 X_{Y_1} + \ldots + \mu_n X_{Y_n}$.*

Osservazione 9.5.3 Dato $\mathbf{P}^n$, sia $Y \subset \mathbf{P}^n$ una ipersuperficie. Se π è un qualsiasi iperpiano di $\mathbf{P}^n$ non contenuto in Y, si può passare a coordinate affini in $\mathbf{P}^n \setminus \pi$ per studiare $X_Y = Y \setminus (\pi \cap Y)$.

Esercizi.

i) Scrivere l'equazione proiettiva delle ipersuperficie trovate nel capitolo delle ipersuperficie affini.

   a) La chiusura proiettiva del cilindro circolare retto di equazione $xy + yz + zx = 0$ è l'ipersuperficie proiettiva definita dall'equazione $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$.

   b) La chiusura proiettiva del cono di equazione: $x^2 + 2y^2 = (1 - z)^2$ è l'ipersuperficie proiettiva definita dall'equazione $x_1^2 + 2x_2^2 = (x_0 - x_3)^2$.

   c) La chiusura proiettiva del cono di equazione $x^2 - y^2 - 2z^2 + 2yz + 2z - 1 = 0$ ha equazione proiettiva $x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_0 - x_0^2 = 0$.

d) L'omogeneizzazione di $2(1-y)x - z^2$ è $2(x_0 - x_2)x_1 - x_3^2$.

e) L'omogeneizzazione di $3(x-z) - (y-z)^2$ è $3x_0(x_1 - x_3) - (x_2 - x_3)^2$.

f) L'omogeneizzazione di $2(y-3x)^2 + (z-2x)^2 - 1$ è $2(x_2 - 3x_1)^2 + (x_3 - 2x_1)^2 - x_0^2$.

g) L'omogeneizzazione di $x^2 - 2(z+y)^2 - 3$ è $x_1^2 - 2(x_3 + x_2)^2 - 3x_0^2$.

h) L'omogeneizzazione di $x^2 - y^2 - z^2 - 1$ è $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_0^2$.

i) L'omogeneizzazione di $y^2 + z^2 - 2x$ è $x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_0$.

j) L'omogeneizzazione di $x^2 + y^2 + 2z^2 - 1$ è $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_0^2$.

ii) Scrivere l'equazione affine di $x_0^3x_1 + x_2x_1^3 + 3x_0^4 = 0$. (E' $t_1^3 + t_2t_1^3 + 3 = 0$.)

Osservazione 9.5.4 *La costruzione della chiusura proiettiva di una ipersuperficie non dipende dalla scelta del riferimento $\mathcal{R}$.*

Dim. Sia infatti $\mathcal{R}'$ un altro riferimento, e sia $\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{t}' + \mathbf{c}$ la relazione che descrive il cambio di coordinate. Se $f(\mathbf{t}) = 0$ è l'equazione di X di grado d in $\mathcal{R}$, allora X ha equazione $f(\mathbf{B}\mathbf{t}' + \mathbf{c}) = 0$ in $\mathcal{R}'$.

Di conseguenza, l'equazione di $\overline{X}$ in $\mathcal{R}_{\mathbf{P}}$ è data da

$$x_0^d\, f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x_0, \ldots, x_n) = 0\,, \tag{9.34}$$

mentre l'equazione di $\overline{X}$ in $\mathcal{R}'_{\mathbf{P}}$ è data da

$$\begin{aligned} &{x'_0}^d\, f(b_{11}\frac{x'_1}{x'_0} + \ldots + b_{1n}\frac{x'_n}{x'_0} + c_1, \ldots, b_{n1}\frac{x'_1}{x'_0} + \ldots + b_{nn}\frac{x'_n}{x'_0} + c_n) = \\ = &{x'_0}^d\, f(c_1\frac{x'_0}{x'_0} + b_{11}\frac{x'_1}{x'_0} + \ldots + b_{1n}\frac{x'_n}{x'_0}, \ldots, c_n\frac{x'_0}{x'_0} + b_{n1}\frac{x'_1}{x'_0} + \ldots + b_{nn}\frac{x'_n}{x'_0}) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \Psi(x'_0, \ldots, x'_n) = 0\,. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Dunque l'ipersuperficie $\overline{X}$ è ben definita, perché Ψ si ottiene da Φ (cioè $\Psi = \Phi_\sigma$) mediante la sostituzione omogenea σ di variabili data da:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \\ x_i &= c_i x_0 + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n\,. \end{aligned} \tag{9.36}$$

△

9.6 Ipersuperficie proiettive: intersezioni con i sottospazi.

Sia X una ipersuperficie di grado d di $\mathbf{P}^n$ e sia Σ un sottospazio di dimensione m di $\mathbf{P}^n$, non contenuto in X.

Definizione 9.6.1 Si denota con X_Σ e si dice *intersezione di* X *con* Σ, l'ipersuperficie di Σ determinata come segue, il cui sostegno è $X \cap \Sigma$.

Sia $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo. Si scelgano dei punti $P_1, \ldots, P_m$ che generano Σ e si denoti con $\mathbf{x}_i$ il vettore delle coordinate omogenee di P_i $(i = 1, \ldots, m)$: $P_i = [\mathbf{x}_i]$. Resta allora individuata una rappresentazione parametrica di Σ:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbf{P}^m & \to & \Sigma \\ & [\lambda_0, \ldots, \lambda_m] & \mapsto & P = [\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \ldots + \lambda_m \mathbf{x}_m] \end{array} \tag{9.37}$$

che introduce coordinate $[\lambda_0, \ldots, \lambda_m]$ in Σ; si indichi con $\mathcal{R}_\Sigma$ il riferimento così ottenuto per Σ.

Sia

$$f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \tag{9.38}$$

l'equazione di X in $\mathcal{R}$. Ponendo in tale equazione le espressioni date dalla rappresentazione parametrica di Σ, cioè:

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda_0 x_{1,0} \ldots + \lambda_m x_{m0} \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda_0 x_{1,n} \ldots + \lambda_m x_{mn}\,, \end{aligned} \tag{9.39}$$

si ricava:

$$f(x_0, \ldots, x_n) = f(\lambda_0 x_{1,0} \ldots + \lambda_m x_{m0}, \ldots, \lambda_0 x_{1,n} \ldots + \lambda_m x_{mn}) = 0\,. \tag{9.40}$$

Il primo membro di questa equazione è un polinomio omogeneo di grado d in $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, che si denota con:

$$f_\Sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_m). \tag{9.41}$$

Si osservi che f_Σ non è identicamente nullo, altrimenti Σ sarebbe contenuto in X. Dunque:

$$f_\Sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) = 0 \tag{9.42}$$

definisce una ipersuperficie di grado d *in* $\mathcal{R}_\Sigma$*, che si denota con* X_Σ *e si chiama* intersezione di X *con* Σ*.*

Osservazione 9.6.2 a) Se cambio la scelta dei punti $P_0, \ldots, P_m$, si cambiano coordinate in Σ e l'equazione di X_Σ cambia di conseguenza.

b) Se cambio coordinate in $\mathbf{P}^n$, si hanno le formule di cambiamento $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$. Di conseguenza, P_i ha coordinate $\mathbf{x}'_i = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ nel nuovo sistema ed un punto qualsiasi P ha coordinate

$$\mathbf{x}' = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}'_i = \mathbf{A}^{-1}(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i)\,. \tag{9.43}$$

Inoltre l'equazione di X nel nuovo riferimento è:

$$f(\mathbf{A}\mathbf{x}') = 0 \tag{9.44}$$

Pertanto l'equazione di X_Σ nel riferimento indotto so Σ (che è lo stesso) è:

$$0 = f(\mathbf{A}\mathbf{x}') = f(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i) = f_\Sigma(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)\,. \tag{9.45}$$

c) In particolare, l'intersezione è invariante per proiettività suriettive.

d) Se Σ ha equazioni $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, allora è possibile scegliere come P_i l'i-simo punto fondamentale del riferimento: $P_i = [0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$. I punti P di Σ hanno coordinate $P = [\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0]$ e

$$f_\Sigma = f(\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) = 0\,. \tag{9.46}$$

In sostanza, $[x_0, \ldots, x_m]$ sono coordinate indotte su Σ e $f(\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) = 0$ è l'equazione di X_Σ in tale riferimento (se $X \not\supseteq \Sigma$).

Si osservi infine che se $f = f_1^{\mu_1} \cdots f_r^{\mu_r}$ è una decomposizione di f come prodotto di fattori irriducibili distinti, allora

$$f(\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) = f_1(\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)^{\mu_1} \cdots f_r(\lambda_0, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)^{\mu_r} \tag{9.47}$$

e dunque, se $X = \mu_1 X_1 + \ldots + \mu_r X_r$ è decomposizione in componenti distinte, risulta:

$$X_\Sigma = \mu_1 (X_1)_\Sigma + \ldots + \mu_r (X_r)_\Sigma \tag{9.48}$$

ma non è detto che $(X_i)_\Sigma$ sia irriducibile.

Esempio 9.6.3 Sia Σ una retta non contenuta in X e siano $P_0[y_0, \ldots, y_n] = P_0[\mathbf{y}]$ e $P_1[z_0, \ldots, z_n] = P_0[\mathbf{z}]$ due suoi punti distinti. Ogni punto P di Σ ha coordinate della forma: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}$. Se $f = 0$ è l'equazione di X, la corrispondente equazione di X_Σ è data da

$$f(\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}) = f(\lambda y_0 + \mu z_0, \ldots, \lambda y_n + \mu z_n) = 0. \tag{9.49}$$

Dunque, $X_\Sigma = \mu_1 Q_1 + \ldots + \mu_h Q_h$ per una scelta opportuna dei punti $Q_1, \ldots, Q_h$ e con $\sum_{i=1}^h \mu_i = d$. Il coefficiente μ_i si dice *molteplicità di intersezione di* X *e* r *in* Q_i ed è un invariante proiettivo.

Si è mostrato così il seguente:

Teorema 9.6.4 Teorema di Bézout. *Ogni retta* $r \not\subset X$ *interseca* X *in* d *punti, pur di contare ogni punto con la sua molteplicità di intersezione.*

Definizione 9.6.5 *Sia* P *un punto di* X.
a) Una retta r *passante per* P *e non contenuta in* X *si dice* tangente a X *in* P *se ha molteplicità di intersezione* > 1 *con* X *in* P. *Altrimenti,* r *si dice* secante X *in* P.
b) Se r *è contenuta in* X, *allora, per ogni* $P \in r$, *si dice che la molteplicità di intersezione di* r *con* X *in* P *è* ∞.

Osservazione 9.6.6 a) Se P appartiene ad una componente multipla di X, allora ogni retta per P è tangente.
b) Se $P \in X_1 \cap X_2$ appartiene all'intersezione di due componenti X_1 e X_2 di X, allora ogni retta per P è tangente.

DIM. Siano $f_1 = 0$ ed $f_2 = 0$ equazioni di X_1 ed X_2 rispettivamente, di modo che l'equazione di X è della forma $f = f_1\, f_2\, g = 0$. Posso assumere che il punto P abbia coordinate $P(1, 0, \ldots, 0)$ e la retta r sia generata da P e da $Q(0, 1, 0 \ldots, 0)$, di modo che r ha equazioni $x_2 = \ldots = x_n = 0$. Basta ora osservare che, nella fattorizzazione:

$$f(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) = f_1(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) f_2(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) g(x_0, x_1, 0, \ldots, 0) \tag{9.50}$$

entrambi i fattori $f_1(x_0, x_1, 0, \ldots, 0)$ e $f_2(x_0, x_1, 0, \ldots, 0)$ si annullano in P e sono pertanto divisibili per x_1. Dunque, $f(x_0, x_1, 0, \ldots, 0)$ è divisibile per x_1^2, da cui l'asserto. $\triangle$

Esempio 9.6.7 $d = 2$: Sia $X = Q$ una quadrica.

a) $n = 2$: le possibili intersezioni di una retta r con Q sono di uno dei seguenti tipi:

i) tutta la retta $r \subset Q$: la molteplicità di intersezione è ∞ in ogni punto.

ii) un punto con molteplicità 2, e la retta è ivi tangente a Q;

iii) due punti distinti con molteplicità 1 ciascuno, e la retta è secante X in essi;

b) $n = 3$: le possibili intersezioni di una retta $r \not\subset Q$ con Q sono di uno dei seguenti tipi:

i) un punto di molteplicità 2 se Q è un piano doppio.

ii) due punti distinti con molteplicità 1 ciascuno oppure un punto con molteplicità 2 se Q è composta da due piani distinti π_1 e π_2 (si ottiene un punto con molteplicità 2 quando l'intersezione tra r e Q è contenuta in $\pi_1 \cap \pi_2$);

iii) due punti distinti con molteplicità 1 ciascuno oppure un punto con molteplicità 2 se Q è irriducibile (si ottiene un punto con molteplicità 2 quando r e Q sono tangenti);

Definizione 9.6.8 *Un punto $P \in X$ si dice di* molteplicità μ *per X se ogni retta r passante per P ha molteplicità di intersezione con X in P maggiore o uguale a μ, e c'è almeno una retta per cui tale molteplicità è esattamente μ. Se $\mu = 1$, il punto si dice* semplice *o* non singolare*; altrimenti, si dice* singolare*. Infine, una ipersuperficie X si dice* non singolare *se ogni suo punto è semplice per X.*

Osservazione 9.6.9 a) $\mu \leq d$;

b) Se $\mu = d$, X è un *cono* di vertice P, cioè è unione di rette per P. Particolari esempi di coni sono i seguenti:

i) Unioni di iperpiani per un punto.

ii) I coni considerati nel capitolo sulle ipersuperficie affini.

c) Un punto P è singolare per una quadrica Q se e solo se ha molteplicità 2 per Q.

Osservazione 9.6.10 a) Se P appartiene ad una componente multipla X_1 di X di molteplicità μ_1, la molteplicità del punto P in X è $\geq \mu_1$.

b) Se $P \in X_1 \cap X_2$ appartiene all'intersezione di due componenti X_1 e X_2 di X di molteplicità μ_1 e μ_2 rispettivamente, la molteplicità del punto P in X è $\geq \mu_1 + \mu_2$.

DIM. Analoga alla dimostrazione dell'osservazione (9.6.6). △

Esercizi su ipersuperficie affini. Sia $\mathbf{A_C}$ lo spazio affine complessificato dello spazio affine 3-dimensionale reale. Si consideri fissato un riferimento $\mathcal{R}$.

1) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(2,1,3)$ e direttrice (rispettivamente):

   a) la circonferenza nel piano $z=0$ di centro $C(1,1)$ e raggio 2;

   b) la circonferenza nel piano $x+y+z-1=0$ e avente il centro in $C(0,0,1)$;

   c) la conica di equazioni $xy=0$, $z=0$;

   d) la conica di equazioni $x^2+2y^2-z^2+xy-2x-4y-z+3=0\, z=1$.

   Discutere l'irriducibilità delle ipersuperficie così ottenute.

2) Determinare l'equazione del cono di vertice $V(0,0,0)$ e direttrice la curva di equazioni parametriche $x=t, y=t^2, z=t^3$.

3) Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto $V(1,1,1)$, appartenenti al piano α di equazione $x+2y-z-2=0$ e formanti angolo $\frac{\pi}{4}$ con il piano $z=0$. (sol: hanno equazioni $4x+3y=7$, $5y-4z=1$; $y=1$, $x=y$ rispettivamente)

4) Scrivere l'equazione del cilindro avente (rispettivamente):

   a) generatrici parallele alla retta passante per $P(1,2,1)$ e $Q(0,1,0)$ e direttrice $z=0, 3x^2+y^2=2$.

   b) generatrici parallele alla retta di equazioni $x=y=z$ e, come direttrice, la conica di equazioni $xy=0$, $x+2y-z=0$;

   c) generatrici con numeri direttori $(1,2,1)$ e, come direttrice, la conica di equazioni $xy=1$, $z=0$;

   d) come direttrice la conica di equazioni $x^2+2y^2+z^2-1$, $x+2y=0$ e generatrici perpendicolari al piano della direttrice.

   Discutere l'irriducibilità delle ipersuperficie così ottenute.

5) Determinare l'equazione del cilindro di direttrice la curva di equazioni parametriche $x=t, y=t^2, z=t^3$ e di generatrici di numeri direttori $(1,1,0)$.

6) Si determini l'equazione della superficie di rotazione ottenuta ruotando l'iperbole di equazioni $xy = 1$, $z = 0$ attorno all'asse x.

7) Si determini l'equazione della superficie di rotazione generata rispettivamente (controllare se la superficie ottenuta è irriducibile):

   a) da $x = 0, y^2 - 2z^2 = 0$, ruotando attorno all'asse z (si ottiene $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$);

   b) dalla circonferenza nel piano $z = 0$ di centro $C(2, 0, 0)$ e raggio 1, ruotando attorno all'asse z;

   c) dalla circonferenza nel piano $z = 0$ di centro $C(2, 0, 0)$ e raggio 1, ruotando attorno alla retta $x = z$;

   d) dalla retta di equazioni $z = y$, $x + y = 3$, ruotando attorno all'asse z.

8) Si scriva l'equazione dei punti equidistanti dal punto $P(0, 0, 1)$ e dal piano $z = 0$.

9.7 Ipersuperficie proiettive e affini.

1) Data la quadrica affine Q in uno spazio affine complesso di dimensione 3, trovare l'equazione omogenea del completamento, la matrice associata, il rango. Dire inoltre se tale quadrica ammette punti non semplici.

   a) Q di equazione $3x + 2x^2 + 7y^2 + z = 1$;

   b) Q di equazione $3 + 2xy + 3y^2 + z^2 = 0$;

   c) Q di equazione $2z + 5xy + 3z^2 = 1$;

2) Determinare l'intersezione del completamento di ciascuna delle quadriche dell'esercizio precedente con la retta r di equazioni $x_2 = x_1 - 3 = 0$ e verificare la validità del teorema di Bézout.

Esercizi su ipersuperficie proiettive.

1) Determinare un'equazione di X_Σ nei seguenti casi:

   a) X di equazione $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_1x_0^2$ e Σ di equazione $3x_1 + x_2 = 0$ in $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

   b) X di equazione $x_0x_3 = x_1x_2$ e Σ di equazione $x_1 = x_2 = 0$ in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$.

2) Studiare la molteplicità di intersezione in $[1, 0, 0]$ di ciascuna delle seguenti ipersuperficie di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, con le rette indicate; determinare inoltre la molteplicità di $[1, 0, 0]$ come punto della ipersuperficie e l'equazione di una retta tangente l'ipersuperficie in $[1, 0, 0]$:

   a) $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_1x_0^2$, r_1 di equazione $x_1 = x_2$ ed r_2 di equazione $x_1 = 0$;

   b) $x_0x_2^2 = x_1^3 + x_1^2x_0 + 3x_1x_0^2$ e $3x_1 + 2x_2 = 0$;

   c) $x_0^3x_2 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 = 0$ e $x_1 = 0$.

3) Determinare la molteplicità di intersezione in $[1, 0, 0, 0]$ di ciascuna delle seguenti ipersuperficie di $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, con le rette indicate:

   a) $x_0x_3 = x_1x_2$ e la retta r per $[1, 0, 0, 0]$ e $[3, 2, 1, 1]$. Determinare inoltre l'intersezione dell'ipersuperficie con r.

   b) $x_0x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ e la retta di equazioni $x_1 = x_2, x_3 = 0$.

Capitolo 10

Quadriche

10.1 Quadriche.

In questo capitolo verrà affrontato lo studio delle quadriche dello spazio proiettivo complesso $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, visto come il completamento dello spazio affine $\mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$.

Da questo studio, si possono trarre informazioni utili anche qualora l'ambiente sia il seguente, indicato con

$$(\star) \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} & \text{la cui complessificazione è } \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}} \\ \mathbf{A}^n_{\mathbf{R}} & \text{la cui complessificazione è } \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}} \end{cases}$$

Definizione 10.1.1 *Una* quadrica *proiettiva Q è una ipersuperficie definita da una equazione omogenea $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ di secondo grado. Si assume che l'equazione sia reale, qualora si lavori nell'ambiente $(\star)$.*

Ricordando che $f(x_0, \dots, x_n)$ è un polinomio omogeneo di secondo grado, si può scrivere:

$$f(x_0, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}) = \sum_{0 \le i \le j \le n} b_{ij}\, x_i x_j\,. \tag{10.1}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= b_{ii} && i = 0, \dots, n \\ a_{ij} &= \frac{b_{ij}}{2} && \text{se } i < j \\ a_{ij} &= a_{ji} = \frac{b_{ij}}{2} && \text{se } i > j \end{aligned} \tag{10.2}$$

resta individuata una matrice quadrata simmetrica $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} \qquad \text{ove } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

Viceversa, ogni polinomio di secondo grado si scrive così in un unico modo.

Definizione 10.1.2 *Sia f un polinomio omogeneo di secondo grado e sia $\mathbf{A}$ la matrice simmetrica associata ad f, come sopra. Si dice* forma bilineare associata a f *e si denota con Ω_f la forma bilineare:*

$$\begin{array}{rccl} \Omega_f: & k^{n+1} \times k^{n+1} & \to & k \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mapsto & \Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{x}\,. \end{array} \tag{10.4}$$

Osservazione 10.1.3 La forma bilineare $\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ è un prodotto scalare, e inoltre vale l'identità di Eulero:

$$\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \tag{10.5}$$

e dunque f è la forma quadratica associata a $\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Poiché la matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, ponendo $f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i = 0, \ldots, n)$, si ricava:

$$\mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{y}) x_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) y_i\,. \tag{10.6}$$

Esempio 10.1.4 a) Il completamento della conica affine di equazione $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + y + 1 = 0$ ha equazione omogenea $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1x_0 + x_2x_0 + x_0^2 = 0$; la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

b) La matrice associata alla quadrica di $\mathbf{P}^3$ di equazione $x_0^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - x_3^2 + x_1x_3 = 0$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \tag{10.8}$$

10.2 Formule di cambiamento del riferimento.

Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ due riferimenti di $\mathbf{P}^n$. Si denotino con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, rispettivamente, le coordinate di un punto nei due riferimenti e sia $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}'$ la legge della trasformazione delle coordinate.

Nel riferimento $\mathcal{R}$, l'equazione di una quadrica Q è della forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x}$, la cui forma bilineare associata è $\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Nel riferimento $\mathcal{R}'$, l'equazione di Q sarà data da $f'(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^t(\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}'$, la cui forma bilineare associata è $\Omega_{f'}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \mathbf{x}'^t(\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{y}'$.

Osservazione 10.2.1 i) $\det(\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})^2 \det(\mathbf{A})$.

ii) Il rango della matrice associata ha significato proiettivo e viene detto *rango della quadrica*. In particolare, l'avere determinante nullo ha significato proiettivo.

Esempio 10.2.2 Caso $n = 1$. Un polinomio omogeneo di secondo grado è necessariamente della forma:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1) &= (a_1x_0 - b_1x_1)(a_2x_0 - b_2x_1) = \\ &= a_1a_2x_0^2 - (a_1b_2 + a_2b_1)x_0x_1 + b_1b_2x_1^2 \end{aligned} \tag{10.9}$$

la cui matrice associata è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & \frac{a_1b_2+a_2b_1}{2} \\ -\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2} & b_1b_2 \end{pmatrix}. \tag{10.10}$$

Il determinante di $\mathbf{A}$ è dato da

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_1a_2b_1b_2 - \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)^2}{4} = \\ &= -\frac{(a_1b_2)^2}{4} - \frac{(a_2b_1)^2}{4} + \frac{2a_1a_2b_1b_2}{4} = \\ &= -\frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{4} \end{aligned} \tag{10.11}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad [b_1, a_1] = [b_2, a_2] \end{aligned} \tag{10.12}$$

In altre parole, $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow$ la quadrica di equazione $f = 0$ è composta da un unico punto, con molteplicità 2.

Osservazione 10.2.3 a) Nell'esempio precedente, f e g definiscono la stessa quadrica $\Leftrightarrow$ f e g sono proporzionali.

b) è possibile provare il risultato del punto a) anche per $n > 1$ in modo diretto, senza ricorrere al teorema degli zeri.

c) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$ è il discriminante di $f(x_0, x_1) = ax_0^2 + 2bx_0x_1 + cx_1^2$.

Proposizione 10.2.4 *Una quadrica Q di $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ ($n \geq 2$) è riducibile $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} Q \stackrel{def}{=} \operatorname{rg} \mathbf{A} \leq 2$. In particolare, il determinante della matrice associata (in un qualunque riferimento) è 0. Più precisamente,*

a) $\operatorname{rg} Q = 1 \Leftrightarrow Q$ è composta da un iperpiano con molteplicità 2,

b) $\operatorname{rg} Q = 2 \Leftrightarrow Q$ è composta da due iperpiani distinti.

Dim. $\Rightarrow$): Se Q è riducibile, è della forma $Q = X_1 + X_2$ per opportuni iperpiani X_1 e X_2. E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui X_1 abbia equazione $x_0 = 0$. Sia $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ una equazione di X_2 in tale riferimento.

La quadrica Q ha dunque equazione $a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + \ldots + a_nx_0x_n = 0$ e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \ldots & \frac{a_n}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_n}{2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

Osservando la matrice, si vede che $\operatorname{rg} \mathbf{A} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow X_1 = X_2 \\ 2 & \Leftrightarrow X_1 \neq X_2 \end{cases}$ e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

$\Leftarrow$): Supponiamo che $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 1$. In tal caso (cf. anche [AL], Cor. 10.28, pag. 158), esistono un vettore riga numerico $\mathbf{a}$ e scalari non tutti nulli $\rho_0, \ldots, \rho_n$ tali che:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_0\mathbf{a} \\ \rho_1\mathbf{a} \\ \vdots \\ \rho_n\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a}\,. \tag{10.14}$$

E' possibile scegliere una matrice non singolare $\mathbf{B}$ tale che $(\rho_0, \ldots, \rho_n)\mathbf{B} = (1, 0, \ldots, 0)$. Si scelga il sistema di riferimento corrispondente al cambio di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}'$. L'equazione di Q, nel nuovo sistema di coordinate, è diventata

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'^t\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}' &= \mathbf{x}'^t\mathbf{B}^t \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{x}' = \\ &= x'_0\,(\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{x}') = 0 \end{aligned} \tag{10.15}$$

mettendo in evidenza che Q è riducibile, contenendo l'iperpiano di equazione $x'_0 = 0$. Per quanto osservato, poiché $\mathbf{A}$ ha rangodue, Q deve essere composta da un iperpiano con molteplicità 2.

Supponiamo ora che rg $\mathbf{A} = 2$. Sia $S = \{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = 0\ \forall\, i = 2, \ldots n$. Si completi S ad una base $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ di $\mathbf{C}^{n+1}$ e si consideri il riferimento che ha $[\mathbf{v}_0], \ldots, [\mathbf{v}_n]$ come punti fondamentali. Se $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}'$ descrive il cambiamento di coordinate, la matrice $\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}$ di Q nel nuovo sistema è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & 0 \\ b & d & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{10.16}$$

con $ad - b^2 \neq 0$. Dunque, nel nuovo sistema, Q è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo in due variabili, che necessariamente si fattorizza propriamente. Dunque Q è riducibile. Per quanto prima osservato, Q si deve allora decomporre come somma di due iperpiani distinti, altrimenti il rango sarebbe 1. $\triangle$

In particolare, si ritrova il seguente risultato già noto:

Corollario 10.2.5 *La quadrica Q è riducibile $\Leftrightarrow$ Q contiene un iperpiano.*

10.3 Intersezione con una retta.

Fissato un riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbf{P}^n$, sia $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ l'equazione di una quadrica Q e sia $\Omega_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}$ la forma bilineare associata.

Una retta r di $\mathbf{P}^n$ è individuata da due suoi punti distinti $P_1[\mathbf{y}]$, $P_2[\mathbf{z}]$ ed ogni suo punto P ha coordinate della forma $P[\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}]$. L'intersezione Q_r tra Q ed r è definita dall'equazione:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}) = (\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z})^t\mathbf{A}(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}) = \\ &= \lambda^2 f(\mathbf{y}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \mu^2 f(\mathbf{z}) = 0 \end{aligned} \tag{10.17}$$

il cui discriminante è dato da:

$$\Delta = \Delta_{r,Q,\mathcal{R}} = \Omega_f^2(\mathbf{y},\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})f(\mathbf{z})\,. \tag{10.18}$$

Osservazione 10.3.1 a) $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$ l'intersezione tra Q e r è composta da due punti distinti, ciascuno con molteplicità di intersezione 1.

b) $\Delta = 0$ e sono nulli tutti i coefficienti $f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}), \Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{z})$ dell'equazione $\Leftrightarrow$ la retta r è interamente contenuta in Q.

c) $\Delta = 0$ e l'equazione (10.17) non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ l'intersezione tra Q e r è composta da un'unico punto con molteplicità di intersezione 2.

Si ritrova dunque il

Teorema 10.3.2 Teorema di Bézout. *Se $r \not\subset Q$, allora l'intersezione tra Q ed r è composta da due punti, da contare con molteplicità pari alla molteplicità di intersezione.*

Osservazione 10.3.3 Più in generale, sappiamo che, se Σ è un sottospazio, Q_Σ è una quadrica di Σ, oppure $\Sigma \subset Q$.

10.4 Molteplicità di un punto.

Si considerino fissati un sistema di riferimento ed una quadrica Q di equazione $f(\mathbf{x}) = 0$ nel riferimento.

Sia $P[\mathbf{y}]$ un fissato punto di Q, cioè $f(\mathbf{y}) = 0$. Sia $R[\mathbf{z}]$ un punto qualunque di $\mathbf{P}^n$, distinto da P. Un punto X della retta congiungente P ed R ha coordinate della forma $X[\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}]$. Come precedentemente osservato, l'intersezione della retta generate da P ed R e la quadrica Q è data dall'equazione

$$\lambda^2 f(\mathbf{y}) + 2\lambda\mu\Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \mu^2 f(\mathbf{z}) = 0 \tag{10.19}$$

che, ricordando che P appartiene alla quadrica, si semplifica in

$$\mu\left(2\lambda\Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{z})+\mu f(\mathbf{z})\right)=0 \tag{10.20}$$

Teorema 10.4.1 *Il punto $P=P[\mathbf{y}]\in Q$ è doppio per $Q \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{x})$ è identicamente nullo come polinomio in $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}^t\mathbf{A}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{0}$.*

DIM. P è doppio se e solo se, per ogni punto R, la relazione (10.20) ammette la radice $\mu=0$ con molteplicità 2, il che avviene se e solo se $\Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{z})=0$ per ogni $\mathbf{z}$. △

Corollario 10.4.2 *Una quadrica Q è singolare se e solo se $\det \mathbf{A}=0$.*

Il risultato del teorema precedente può essere riformulato come:

Teorema 10.4.3 *Un punto $P=P[\mathbf{y}]\in Q$ è semplice per $Q \Leftrightarrow \Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{x})$ non è identicamente nullo come polinomio in $\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}^t\mathbf{A}\neq\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$.*

Teorema 10.4.4 *Sia $P=P[\mathbf{y}]\in Q$ un punto semplice. Allora il luogo dei punti $R=R[\mathbf{x}]\in\mathbf{P}^n$ tali che la retta r per P e R sia tangente a Q in P è un iperpiano (detto* iperpiano tangente a Q in P*) definito dall'equazione:*

$$\begin{aligned}\Omega_f(\mathbf{y},\mathbf{x})=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x}=0 \Leftrightarrow (a_{00}y_0+\ldots+a_{0,n}y_n)x_0+\ldots+(a_{n0}y_0+\ldots+a_{n,n}y_n)x_n=0\\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}=0 \Leftrightarrow (a_{00}x_0+\ldots+a_{0,n}x_n)y_0+\ldots+(a_{n0}x_0+\ldots+a_{n,n}x_n)y_n=0\end{aligned}$$

DIM. Analoga alla precedente. △

Osservazione 10.4.5 a) $n=2$: Q è una conica. Se $P\in Q$ è semplice, l'iperpiano tangente a Q in P è una retta, la retta tangente.

b) $n\geq 3$: siano P un punto semplice di una quadrica Q e π un iperpiano per P. L'iperpiano π è tangente a Q in P se e solo se $\pi\subset Q$ (e, in tal caso, Q è riducibile) oppure l'intersezione Q_π ha un punto doppio in P.

Definizione 10.4.6 *Un sottospazio Σ è tangente ad una quadrica Q in un punto semplice $P\in Q$ se contiene P ed è contenuto nell'iperpiano tangente a Q in P.*

Analogamente a quanto osservato in precedenza, si ha:

Osservazione 10.4.7 Un sottospazio Σ passante per un punto semplice P di una quadrica Q è tangente a Q in P se e solo se $\Sigma\subset Q$ oppure l'intersezione Q_Σ ha un punto doppio in P.

Si denoti con $Sing(Q)$ l'insieme dei punti doppi di una quadrica Q.

Teorema 10.4.8 *L'insieme $Sing(Q)$ dei punti doppi di una quadrica $Q \subset \mathbf{P}^n$ forma un sottospazio di dimensione $n - \mathrm{rg}\,(Q)$.*

DIM. Per quanto visto, $Sing(Q)$ è definito dalla condizione $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. $\triangle$

Corollario 10.4.9 *Se $n > 1$, ogni quadrica riducibile è singolare, poiché è nullo il suo determinante.*

Osservazione 10.4.10 *L'i-esimo punto fondamentale del sistema $P_i[0, \ldots, 1, 0, \ldots 0]$ è singolare per Q $\Leftrightarrow$ la i-esima riga $\mathbf{a}_i$ di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ la i-esima colonna $\mathbf{a}_i$ di $\mathbf{A}$ è nulla $\Leftrightarrow$ nell'espressione di f non compare la variabile x_i.*

In altri termini:

Osservazione 10.4.11 *L'i-esimo punto fondamentale del sistema $P_i[0, \ldots, 1, 0, \ldots 0]$ è semplice per Q $\Leftrightarrow$ la i-esima riga $\mathbf{a}_i$ di $\mathbf{A}$ non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ la i-esima colonna $\mathbf{a}_i$ di $\mathbf{A}$ non è identicamente nulla $\Leftrightarrow$ l'espressione di f è lineare nella variabile x_i. In tal caso, l'annullarsi del coefficiente di x_i definisce l'iperpiano tangente a Q in $P_i[0, \ldots, 1, 0, \ldots 0]$.*

Esercizio.

a) Si consideri la conica Q di equazione $2x_0x_1 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 0$.

   i) Determinare il rango di Q e i suoi punti doppi.

   ii) Osservare che i punti $P_0[1, 0, 0]$ e $P_1[0, 1, 0]$ sono semplici per Q e determinare la rispettiva retta tangente a Q.

   iii) Dire se Q è riducibile.

b) Si consideri la quadrica Q di $\mathbf{P}^3$ di equazione $2x_1x_0 + x_3^2 = 0$.

   i) Determinare il rango di Q e i suoi punti doppi.

   ii) Determinare il piano tangente a Q nel punto $P_0[1, 0, 0, 0]$.

   iii) La retta $x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0$ è tangente a Q in $P_0[1, 0, 0, 0]$?

10.5 Quadriche singolari.

Con le consuete notazioni, siano Q una quadrica di $\mathbf{P}^n$ di equazione $f(\mathbf{x}) = 0$ in un riferimento fissato, e sia $\mathbf{A}$ la matrice associata.

Per quanto osservato, la quadrica Q è singolare se e solo se $\mathbf{A} = 0$ e, in tal caso, $Sing(Q)$ forma un sottospazio di dimensione $n - r$, se con $r = \operatorname{rg} Q$ si denota il rango di Q.

Proposizione 10.5.1 *Sia Q una quadrica singolare di $\mathbf{P}^n$ di rango r e sia Σ un sottospazio di dimensione $r - 1$ sghembo con $Sing(Q)$. Allora:*

a) la quadrica intersezione Q_Σ è non degenere;

b) $Q = \cup_{P \in Q_\Sigma} P \vee \Sigma$; in particolare, Q è un cono di vertice $Sing(Q)$.

Dim. E' possibile scegliere i punti fondamentali $P_0, \dots P_n$ del riferimento in modo che $\Sigma = P_0 \vee \dots \vee P_{r-1}$ e $Sing(Q) = P_r \vee \dots \vee P_n$. L'equazione $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ di Q in tale riferimento non dipende dalle variabili $x_r, \dots, x_n$ e l'equazione di Q_Σ è $f = 0$ pensata come equazione nelle sole variabili $x_0, \dots, x_{r-1}$. Se Q_Σ fosse degenere, si potrebbe scegliere $P_0 \in Sing(Q_\Sigma)$ e allora f non dipenderebbe da x_0; ma allora, $P_0 \in Sing(Q)$, che è assurdo. Ciò prova l'asserto a).

L'asserto b) è ovvio. △

Osservazione 10.5.2 Come conseguenza del teorema di Bézout, se l'intersezione di una retta r con una quadrica Q contiene un punto P singolare per Q ed un altro punto $R \neq P$, allora la retta r è necessariamente contenuta in Q.

Esempio 10.5.3 a) $n = 2$

i) $r = 2$: Q è composta da due rette distinte H_1 e H_2 con molteplicità 1, $Sing(Q)$ è formato dal punto di intersezione tra H_1 e H_2 e ogni retta che non passi per $H_1 \cap H_2$ fa le veci di Σ.

ii) $r = 1$: Q è composta da un iperpiano H con molteplicità 2, $Sing(Q) = H$, Σ è un punto esterno ad H. Si dice che Q è doppiamente degenere.

b) $n = 3$

i) $r = 3$: $Sing(Q)$ è un punto V e Q è il cono di vertice V e direttrice una conica non singolare contenuta in un piano non passante per V.

ii) $r = 2$: Q è composta da due iperpiani distinti H_1 e H_2 con molteplicità 1, $Sing(Q)$ la retta intersezione tra H_1 e H_2, Σ è una retta sghemba con $Sing(Q)$. Si dice che Q è doppiamente degenere.

iii) $r = 1$: Q è composta da un iperpiano H con molteplicità 2, $Sing(Q) = H$, Σ è un punto esterno ad H. Si dice che Q è triplamente degenere.

10.6 Studio delle quadriche affini.

Si passi a coordinate affini $(t_1, \ldots, t_n)$. Decomposta in parti omogenee, l'equazione affine di una quadrica Q si scrive come:

$$f(1, t_1, \ldots, t_n) = f_2(t_1, \ldots, t_n) + f_1(t_1, \ldots, t_n) + f_0 = 0\,. \tag{10.21}$$

Ricordando l'osservazione (10.4.10), si ottiene facilmente la seguente:

Osservazione 10.6.1 Molteplicità dei punti fondamentali del riferimento.

a) Q passa per l'origine $O \Leftrightarrow f_0 = 0$.

b) Q è singolare nell'origine $O \Leftrightarrow f_1 = f_0 = 0$.

c) Il completamento di Q passa per $(t_i)_\infty \Leftrightarrow$ la coordinata t_i compare al più linearmente nell'equazione $\Leftrightarrow$ il coefficiente di t_i^2 in f_2 è nullo.

d) Il completamento di Q è singolare in $(t_i)_\infty \Leftrightarrow$ la coordinata t_i non compare in f.

Analogamente, ricordando l'osservazione (10.4.11), si ha:

Osservazione 10.6.2 Punti semplici nei punti fondamentali.

a) L'origine O è semplice per $Q \Leftrightarrow f_0 = 0$ ma f_1 non è identicamente nullo. In tal caso, l'equazione dell'iperpiano tangente a Q in O è $f_1 = 0$.

b) $(t_i)_\infty$ è semplice per il completamento di $Q \Leftrightarrow$ la coordinata t_i compare linearmente, ma non con grado 2, in f. In tal caso, l'equazione dell'iperpiano tangente a Q in $(t_i)_\infty$ è il coefficiente di t_i in f.

c) Il completamento di Q è singolare in $(t_i)_\infty \Leftrightarrow$ la coordinata t_i non compare in f.

Osservazione 10.6.3 Classificazione affine delle quadriche degeneri. Sia Q una conica affine degenere, cioè $\det \mathbf{A} = 0$. Si può pensare che il sottospazio Σ complementare di $Sing(Q)$ sia contenuto nell'iperpiano all'infinito. Si denoti con $\mathbf{A}_{11}$ la sottomatrice (simmetrica) di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna. Si osservi che $(x_1, \ldots, x_n)\mathbf{A}_{11}(x_1, \ldots, x_n)^t = 0$ è l'equazione dell'intersezione del completamento proiettivo di Q con l'iperpiano $x_0 = 0$. La natura di tale intersezione ed il rango di Q sono invarianti per isomorfismi affini e permettono di riconoscere differenti tipologie per le quadriche affini.

Esempio 10.6.4 a) $n = 2$

i) $r = 2$: Q è composta da due rette distinte se $\det \mathbf{A}_{11} \neq 0$ e da due rette parallele se $\det \mathbf{A}_{11} = 0$;

ii) $r = 1$: Q è composta da una retta contata due volte. In particolare, $\det \mathbf{A}_{11} = 0$ e tutti i punti di Q sono singolari.

b) $n = 3$

i) $r = 3$: $\begin{cases} Q \text{ è un cono se } \det \mathbf{A}_{11} \neq 0 \\ Q \text{ è un cilindro se } \det \mathbf{A}_{11} = 0. \end{cases}$

ii) $r = 2$: Q è composta da due piani distinti H_1 e H_2, che sono tra loro paralleli quando $\mathbf{A}_{11}$ ha rango 1.

iii) $r = 1$: Q è composta da un piano H con molteplicità 2, e tutti i suoi punti sono singolari.

Esercizi.

a) Si consideri la quadrica affine di $\mathbf{A}^3$ di equazione $3xz-3x-5z+5+yz-y = 0$. Determinare il rango di Q e mostrare che Q è un cono. Determinare inoltre le coordinate del vertice di Q ed una sua direttrice.

b) Si considerino le quadriche di $\mathbf{A}^3$ definite, rispettivamente, dalle seguenti equazioni:

i) $x^2 + 2x - 2(z + y)^2 - 2 = 0$;

ii) $3x^2 - 5x + xy - 3x + 5 - y = 0$;

iii) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2x + 3y - z = 0$;

iv) $(x+3)y + yz + z(x+3) = 0$;

v) $x^2 + 2x - 2(z+y)^2$.

Di ciascune di esse, dire se è singolare e, in caso, determinarne il luogo singolare. Qualora la quadrica fosse riducibile, determinarne le componenti.

c) Classificare le seguenti quadriche affini degeneri:

i) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$ in $\mathbf{A}^2$;

ii) $z(x+3) + 15 = 0$ in $\mathbf{A}^3$;

iii) $x^2 - 2(z+y)^2$ in $\mathbf{A}^3$.

d) Determinare l'equazione della retta tangente la conica $x^2 + y^2 + 2x - 3y = 0$ di $\mathbf{A}^2$ nell'origine.

e) Determinare l'equazione dell'iperpiano tangente la quadrica $3xz - 3x - 5z + yz - y = 0$ di $\mathbf{A}^3$ nell'origine e nei punti fondamentali all'infinito. Determinare inoltre una retta tangente la quadrica nell'origine.

f) Per ciascuna delle quadriche sopra elencate, osservare se passano per qualche punto fondamentale, e determinarne eventualmente la molteplicità.

10.7 Sezioni con iperpiani tangenti.

Sia P un punto semplice di una quadrica proiettiva $Q \subset \mathbf{P}^n$ e si denoti con π_P l'iperpiano tangente a Q in P. Si vuole studiare la sezione di Q con π_P. Si osservi che, poiché per ipotesi Q ammette un punto semplice,

$$\pi_P \subset Q \qquad \Leftrightarrow \qquad Q \text{ è riducibile} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{rg} Q = 2, \tag{10.22}$$

e dunque l'intersezione $Q_P \stackrel{def}{=} Q_{\pi_P}$ è definita non appena Q è irriducibile. In tal caso, l'intersezione Q_P ha un punto doppio in P. Si definisca:

$$\sigma_P = \dim Sing\, Q_P \ (\geq 0). \tag{10.23}$$

Definizione 10.7.1 *P si dice* parabolico $\quad \Leftrightarrow \quad \sigma_P > 0$.

P si dice h-parabolico $\quad \Leftrightarrow \quad \sigma_P = h$ *($h \geq 1$ naturale).*

Proposizione 10.7.2 *a) Ogni iperpiano tangente a Q passa per $Sing(Q)$.*

b) Se $Sing(Q)$ ha dimensione $l \geq 0$, ogni $P \in Q \setminus Sing(Q)$ è h-parabolico con $h \geq l+1$.

Dim. a) Se $P \in Q \setminus Sing(Q)$, allora $\Sigma_P \stackrel{def}{=} Sing(Q) \vee P \subseteq Q$ e dunque $\Sigma_P \subseteq \pi_P$.

b) Q_P è singolare in P e nei punti di $Sing(Q)$. $\triangle$

Esempio 10.7.3 $n = 3$: i punti parabolici possono essere al più 1-parabolici, e quindi un punto è parabolico se e solo se è 1-parabolico.

In particolare, per il punto b) della proposizione precedente, tutti i punti semplici di coni e cilindri sono parabolici.

Proposizione 10.7.4 *Se $Q \subset \mathbf{P}^3$ ha un punto parabolico è un cono.*

Dim. Sia P un punto parabolico di Q (che esiste per ipotesi). La quadrica intersezione Q_P è una conica piana il cui luogo singolare ha dimensione (almeno) 1, e dunque Q_P è composta da una retta contata con molteplicità 2. $\triangle$

Corollario 10.7.5 *$Q \subset \mathbf{P}^3$ è singolare e irriducibile $\Leftrightarrow$ ha tutti i punti semplici parabolici.*

Osservazione 10.7.6 Vedremo che vale qualcosa di simile anche in $\mathbf{P}^n$.

Caso reale $Q \subset \mathbf{P}^3$ reale non degenere.

Definizione 10.7.7 *Un punto reale $P \in Q$ si dice* iperbolico *se Q_P è composta da due rette reali.*

Un punto reale $P \in Q$ si dice ellittico *se Q_P è composta da due rette complesse coniugate.*

Proposizione 10.7.8 *I punti reali di una quadrica $Q \subset \mathbf{P}^3$ reale non degenere sono tutti iperbolici o tutti ellittici.*

Dim. Supponiamo che Q ammetta un punto reale iperbolico P: per definizione, π_P è un iperpiano reale e Q_P è composta da due rette reali. E' sufficiente mostrare che tutti i punti reali R di Q sono iperbolici. A questo fine, basta osservare che l'iperpiano π_R è reale ed interseca π_P lungo una retta (reale) r: se r è contenuta in Q, allora r è componente anche di Q_R, e quindi R è iperbolico; altrimenti, $Q_P \cap r$ è composta da due punti reali distinti, che appartengono anche a $Q_R \cap r$; dunque, anche in questo caso, le rette contenute in Q_R sono reali, perchè Q_R contiene due punti reali distinti, e R risulta iperbolico. △

Proposizione 10.7.9 *Una quadrica $Q \subset \mathbf{P}^3$ reale non degenere ha punti iperbolici se e solo se contiene rette reali.*

Dim. Una retta reale r è contenuta nel piano tangente di ogni suo punto. Il viceversa segue direttamente dalla definizione. △

Osservazione 10.7.10 Sia $Q \subset \mathbf{P}^3$ una quadrica reale non degenere a punti iperbolici. Siano $P \in Q$ un punto iperbolico e $Q_P = Q \cap \pi_P = r \cup r'$ la coppia di rette reali tagliate su Q dal piano tangente in P. Per ogni punto $R \in r$ distinto da P, la corrispondente conica Q_R è composta da r e da un'altra retta reale r'_R che interseca r in R; si osservi che r' ed r'_R sono sghembe fra loro, altrimenti r, r' e r'_R risulterebbero complanari e il piano che le contiene sarebbe componente di Q, che è invece irriducibile per ipotesi. Al variare di R in r, si descrive dunque una famiglia di rette reali r'_R, a due a due sghembe tra loro e ciascuna delle quali interseca r in un punto: tale famiglia si dice *schiera di rette*. Si osservi che, dato un qualunque punto reale S di Q, esiste una ed una sola retta della schiera che passi per S: infatti, l'intersezione con Q del piano reale generato da S e da r contiene necessariamente sia r che S e dunque è composta da r e da una retta reale per S che interseca r in un punto.

In modo analogo, al variare di R' nella retta r', si descrive una schiera di rette $r_{R'}$ con le stesse proprietà.

Dunque, *una quadrica reale non degenere* $Q \subset \mathbf{P}^3$ *a punti iperbolici contiene due schiere di rette.*

Esercizi.

a) Determinare i punti parabolici delle quadriche di $\mathbf{P}^3$ aventi le sequenti equazioni:

i) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = 0$;

ii) $x_0^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 = 0$.

b) Dire se le seguenti quadriche di $\mathbf{P}^3$ hanno punti iperbolici o ellittici:

i) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_0x_3 = 0$;

ii) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;

iii) $-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Se la quadrica ha punti iperbolici, determinare le due schiere di rette reali.

10.8 Polarità.

Sia $Q \subset \mathbf{P}^n$ una quadrica, di equazione $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ in un riferimento $\mathcal{R}$.

Definizione 10.8.1 *Sia* $P = P[\mathbf{y}]$ *un punto non singolare di* Q*. L'*iperpiano polare di P rispetto a Q *è l'iperpiano, denotato con* π_P*, di equazione:*

$$\Omega_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0 \qquad \textit{cioè} \qquad \mathbf{y}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 0. \tag{10.24}$$

Si osservi che la definizione di iperpiano polare è ben posta perchè $\Omega_f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ è identicamente nulla come funzione di $\mathbf{x}$ se e solo se $\mathbf{y}^t\mathbf{A} = 0$ e inoltre π_P non dipende dalla scelta del riferimento.

Proposizione 10.8.2 *Siano* $P, P' \in Q$ *punti semplici di* Q*. Valgono allora le seguenti proprietà:*

a) appartenenza: $P \in \pi_P \Leftrightarrow P \in Q$ *e* π_P *è l'iperpiano tangente;*

b) reciprocità: $P \in \pi_{P'} \Leftrightarrow P' \in \pi_P$*;*

c) sezione: Σ *è un sottospazio e* $P \in Q_\Sigma \setminus Sing(Q_\Sigma) \Rightarrow \pi_P \not\supset \Sigma$ *(cioè* Σ *non è tangente a* Q *in* P*) e* $\pi_P \cap \Sigma$ *è l'iperpiano polare di* P *rispetto a* Q_Σ*.*

DIM. I primi due asserti sono immediati, e la loro dimostrazione è lasciata per esercizio.

c) E' possibile supporre che il riferimento sia scelto in modo tale che le equazioni di Σ siano $x_{h+1} = \ldots = x_n = 0$. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ è l'equazione di Q nel riferimento, la quadrica intersezione Q_Σ ha equazione $f(x_0, \ldots, x_h, 0 \ldots, 0) = 0$ in Σ e la matrice $\mathbf{A}$ si scrive come matrice a blocchi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{10.25}$$

con $\mathbf{A}_1$ matrice quadrata di ordine $h+1$, di modo che $\mathbf{A}_1$ risulta essere la matrice associata a Q_Σ:

$$f(x_0, \ldots, x_h, 0, \ldots, 0) = (x_0, \ldots, x_h)\mathbf{A}_1(x_0, \ldots, x_h)^t = 0. \tag{10.26}$$

Poiché il punto P appartiene a Σ, le sue coordinate sono della forma $P(p_0, \ldots, p_h, 0, \ldots, 0)$ e l'equazione dell'iperpiano polare π_P è data da:

$$(p_0, \ldots, p_h)(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(x_0, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n)^t = 0. \tag{10.27}$$

L'intersezione di π_P con Σ ha dunque equazione, nelle coordinate di Σ, data da:

$$(p_0, \ldots, p_h)\mathbf{A}_1(x_0, \ldots, x_h) = 0 \tag{10.28}$$

che è anche l'equazione dell'iperpiano polare di P rispetto a Q_Σ: infatti, tale equazione non è identicamente nulla, perché altrimenti sarebbe $(p_0, \ldots, p_h)\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ e P sarebbe singolare per Q_Σ.

$\triangle$

Una quadrica $Q \subset \mathbf{P}^n$ definisce, per quanto visto, una applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^n \setminus Sing(Q) & \rightarrow & \mathbf{P}^{n\star} \\ P & \mapsto & \pi_P \end{array} \tag{10.29}$$

Inoltre, è facile mostrare la seguente:

Proposizione 10.8.3 *Sia* $Q \subset \mathbf{P}^n$ *una quadrica di equazione* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ *in un riferimento. Se* $Sing(Q) = \emptyset$*, allora l'applicazione:*

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \mathbf{P}^n & \rightarrow & \mathbf{P}^{n\star} \\ & P & \mapsto & \pi_P \end{array} \tag{10.30}$$

è una proiettività (di matrice $\mathbf{A}$*). In particolare,* π *manda sottospazi in stelle della stessa dimensione.*

Esempio 10.8.4 Polarità sulla retta. Una quadrica degenere Q di $\mathbf{P}^1$ è composta da un punto A contato con molteplicità 2: $Q = 2A$. In particolare, A coincide con il luogo singolare di Q e la polarità rispetto a Q è l'applicazione costante:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 \setminus \{A\} & \to A & \\ P & \mapsto & A. \end{array} \tag{10.31}$$

Una quadrica non degenere Q di $\mathbf{P}^1$ è composta da due punti distinti A e B. La polarità rispetto a Q è una *involuzione* π (cioè π^2 è l'identità):

$$\begin{array}{cccc} \pi: & \mathbf{P}^1 & \to \mathbf{P}^1 & \\ & P & \mapsto & \pi(P) = P' \end{array} \tag{10.32}$$

e A, B sono gli unici punti fissi per π. Se $P \neq A, B$, i punti P e P' si dicono *coniugati armonici* rispetto ad A e B, e la nomenclatura è giustificata dalla seguente:

Osservazione 10.8.5 *La quaterna* A, B, P, P' *è armonica, cioè ha birapporto* $(A, B, P, P') = -1$.

Dim. Scegliendo opportunamente il riferimento, si può supporre che Q sia composta dal punto $A = \infty = P_1 = [0, 1]$ e dall'origine $B = P_0 = [1, 0]$. L'equazione corrispondente della quadrica è $x_0 x_1 = 0$ e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.33}$$

L'iperpiano polare π_P del punto $P = [1, r]$ ha equazione

$$(x_0, x_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = x_1 + r x_0 = 0 \tag{10.34}$$

e dunque π_P è il punto $P' = [1, -r]$.

Il birapporto (A, B, P, P') è dato, per definizione, dalle coordinate omogenee del punto P' nell'unico riferimento proiettivo i cui punti fondamentali siano B ed A, e P sia il punto unità. Risulta (si rimandano agli esercizi i richiami sulla definizione ed il calcolo del birapporto):

$$(A, B, P, P') = [-r, r] \tag{10.35}$$

cui corrisponde il punto di coordinata affine -1, come si voleva. △

Osservazione 10.8.6 Si osservi che $(0, 1, \infty, 1/2) = -1$; dunque, se una quadrica non degenere $Q = A + B$ non contiene il punto all'infinito, il coniugato armonico del punto all'infinito rispetto a Q (cioè il 'diametro', nella definizione che più avanti verrà introdotta) è il punto medio di A e B.

Osservazione 10.8.7 Se $Q \subset \mathbf{P}^n$ è una quadrica proiettiva non degenere, e P un punto su una retta r non contenuta in Q, allora $P' = \pi_P \cap r$ è il punto polare di P rispetto alla quadrica intersezione $r \cap Q$.

Esercizi.

a) Se $A[p_0, p_1]$, $B[q_0, q_1]$, $R[r_0, r_1]$, $S[s_0, s_1]$, allora

$$(A, B, R, S) = \left[\begin{vmatrix} r_0 & r_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} r_0 & r_1 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} \right].$$

b) Se A, B, R, S sono propri, si può supporre $r_0 = s_0 = p_0 = q_0 = 1$ e $p_1 = a$, $q_1 = b$, $r_1 = c$, $s_1 = d$ e allora $(a, b, c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$.

c) $(\infty, b, c, d) = \frac{(b-d)}{(b-c)}$.

d) $(a, \infty, c, d) = \frac{(a-c)}{(a-d)}$.

e) $(a, b, \infty, d) = \frac{(b-d)}{(a-d)}$.

f) $(a, b, c, \infty) = \frac{(a-c)}{(b-c)}$.

Esempio 10.8.8 Sia $Q \subset \mathbf{P}^n$ una quadrica non degenere e $\pi : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n\star}$ la polarità ad essa associata.

a) $n = 2$: l'immagine di una retta r è il fascio di centro il polo di r.

b) $n = 3$: l'immagine di una retta r è il fascio di piani di centro una retta r', e risulta indotta una corrispondenza $r \mapsto r'$ tra le rette, detta *polarità tra rette*. Valgono le seguenti proprietà:

i) *una retta r coincide con la propria polare se e solo se r è contenuta in Q.*

ii) *se due rette reciprocamente polari r ed r' si intersecano in un punto P, allora P appartiene a Q e r ed r' sono ivi tangenti.*

Per dimostrarlo, basta osservare che $P \in Q$ per la proprietà di appartenenza e il piano $\pi = r \vee r'$ è tangente a Q in P.

iii) *se una retta r è tangente a Q in P, allora anche la polare r' è tangente a Q in P. In particolare, per ogni punto P semplice di Q, la polarità tra rette induce una involuzione tra le rette per P contenute in π_P, detta* involuzione delle tangenti coniugate.

Infatti, se $R \in r \subset \pi_P$ è un punto distinto da P, l'iperpiano polare π_R di R passa per P e la polare di r è l'intersezione tra π_P e π_R, per la proprietà della sezione.

Osservazione 10.8.9 a) $n = 2$: se Q è non singolare, le congiungenti un punto $P \notin Q$ con i punti di intersezione tra Q e la polare π_P sono le rette per P tangenti a Q.

b) $n = 3$: se Q è non singolare, le rette congiungenti un punto $P \notin Q$ con i punti di intersezione tra Q e l'iperpiano polare π_P sono tangenti a Q e formano il *cono circoscritto da P a Q*. Inoltre, se r è una retta non tangente Q anche la sua polare r' interseca Q in due punti distinti; indicati con R, S i due punti in $r' \cap Q$, i due iperpiani $r \vee R$ e $r \vee S$ sono i soli iperpiani passanti per r e tangenti a Q: infatti, ogni iperpiano π passante per r ha polo contenuto in r', e π è tangente a Q se e solo se il suo polo appartiene a Q.

Se Q è una quadrica reale non degenere, una retta r si dice *secante* se $r \cap Q$ è composta da due punti reali, e altrimenti si dice *esterna*. Se r è secante e Q ha punti iperbolici, la retta polare r' è secante ed esistono due piani reali passanti per r e tangenti a Q: infatti, r' si ottiene in particolare intersecando gli iperpiani polari dei due punti di intersezione di r con Q.

Se r è secante e Q ha punti ellittici, la retta polare è esterna e non esistono piani reali passanti per r e tangenti a Q.

Esercizi.

a) Determinare il cono circoscritto dall'origine alle seguenti quadriche dello spazio affine 3-dimensionale:

i) $3x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$;

ii) $2x^2 + y^2 - 2xy + z^2 - 4y + 3z + 1 = 0$.

b) Determinare il cilindro di generatrici parallele alla retta $x = 0, y = z$ circoscritto alle quadriche dell'esercizio precedente.

c) Determinare i piani tangenti la quadrica e passanti per gli assi coordinati nei due esempi precedenti.

10.9 Classificazione proiettiva delle quadriche.

Si premette al caso generale la classificazione delle quadriche della retta proiettiva e del piano proiettivo.

Retta proiettiva. Sia Q una quadrica proiettiva nella retta complessa $\mathbf{P}^1$. Se $Q = 2A$ è degenere, si può scegliere il riferimento in modo tale che A abbia coordinate $A[0, 1]$ e Q abbia equazione $x_0^2 = 0$.

Se $Q = A+B$ è non degenere, il riferimento può essere scelto in modo tale che A e B abbiano coordinate, rispettivamente, $A[1, i]$ e $B[1, -i]$, e Q abbia equazione $x_0^2 + x_1^2 = 0$.

Le equazioni così determinate, si dicono *forma canonica proiettiva* per Q e riflettono la proprietà che le forme quadratiche non degeneri su un campo algebricamente chiuso ammettono sempre una base ortonormale.

Caso reale. Sia Q una quadrica reale di $\mathbf{P}^1$. Se $Q = 2A$ è degenere, esiste un riferimento in cui A ha coordinate $A[0, 1]$ e Q ha equazione $x_0^2 = 0$, in analogia col caso complesso.

Se $Q = A + B$ è non degenere, occorre invece distinguere il caso in cui A e B siano reali (e, in un opportuno riferimento, Q ha allora equazione $x_0^2 - x_1^2 = 0$), dal caso in cui A e B siano immaginari coniugati (e Q ha equazione $x_0^2 + x_1^2 = 0$ in un riferimento opportuno).

Osservazione 10.9.1 La distinzione dei due casi possibili per le quadriche non degeneri reali corrisponde alla distinzione, tra le forme quadratiche reali di rango 2, tra le forme definite e le forme non definite. Come verrà ricordato nel seguito (cf. 10.9.7), la matrice associata alla forma quadratica in un qualsiasi riferimento permette facilmente di operare tale distinzione.

Osservazione 10.9.2 Determinazione della forma canonica nel caso non degenere reale a punti reali. Siano P un punto reale di $\mathbf{P}^1$ non appartenente alla quadrica, e P' il suo polare. In un sistema di riferimento in cui $P[1,0]$ e $P'[0,1]$, la matrice associata a Q è della forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con a e b non nulli e Q ha equazione $ax_0^2 + bx_1^2 = 0$. Nel sistema di coordinate $y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{|a|}}$, $y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{|b|}}$, Q ha equazione $\pm(y_0^2 - y_1^2 = 0)$.

Piano proiettivo complesso. Sia Q una conica non degenere di $\mathbf{P}^2$.

Definizione 10.9.3 *Un* triangolo autopolare *per Q è composto da tre rette distinte a, b, c che si intersecano a due a due in 3 punti distinti A, B, C, in modo tale che $A \notin a$, $B \notin b$, $C \notin c$ e inoltre a è la retta polare di A, b è la retta polare di B, c è la retta polare di C*

Osservazione 10.9.4 *Ogni conica Q una conica non degenere ammette un triangolo autopolare.*

Dim. Sia A un punto che non appartiene a Q e sia $B \notin Q$ un punto sulla retta polare a di A. La retta polare b di B interseca a in un punto C necessariamente distinto da B: a, b, c formano dunque un triangolo autopolare. $\triangle$

Si fissi un triangolo autopolare, e si scelga il sistema di riferimento in cui $A = [1,0,0]$, $B = [0,1,0]$ e $C = [0,0,1]$, di modo che a ha equazione $x_0 = 0$, b ha equazione $x_1 = 0$, c ha equazione $x_2 = 0$. Si vede facilmente che Q ha equazione $ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 = 0$. Nel riferimento $y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{a}}$, $y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{b}}$, $y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{c}}$, Q ha equazione $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$.

Caso reale. Il caso delle coniche reali non degeneri si discute in modo analogo, distinguendo due possibili casi; ciascuno di essi, in un opportuno sistema di riferimento, ammette una equazione della seguente forma (rispettivamente):
i) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ non degenere senza punti reali.
ii) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ non degenere a punti reali.

Caso generale. In modo completamente analogo agli esempi visti, si mostra il seguente:

Teorema 10.9.5 *Sia Q una quadrica proiettiva complessa di $\mathbf{P}^n$ di rango r. Allora esiste* *un sistema di riferimento in cui Q ha equazione: $x_0^2 + \ldots + x_{r-1}^2 = 0$. Due quadriche sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.*

Teorema 10.9.6 Caso reale. (Teorema di Sylvester.) *Sia Q una quadrica proiettiva reale di $\mathbf{P}^n$ di rango r. Allora esiste un sistema di riferimento in cui Q ha equazione: $x_0^2 + \ldots + x_q - x_{q+1} - \ldots - x_{r-1}^2 = 0$ e gli interi q ed r sono univocamente individuati da Q.*

La determinazione della forma canonica individuata nel teorema di Sylvester può essere facilmente ottenuta utilizzando il seguente:

Proposizione 10.9.7 (Criterio di Sylvester.) *Sia φ un prodotto scalare reale e sia $\mathbf{A}$ la matrice ad esso associata in un riferimento.*
a) φ è definito positivo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ sono tutti > 0.
b) φ è definito negativo se e solo se i minori principali di $\mathbf{A}$ di ordine dispari sono tutti < 0 e quelli di ordine pari sono tutti > 0.

Corollario 10.9.8 *Una quadrica Q non degenere ha punti reali se e solo se il prodotto scalare ad essa associato non è definito.*

Esempio 10.9.9 Le quadriche proiettive reali non degeneri di $\mathbf{P}^3$ ammettono, in un opportuno sistema di riferimento, una ed una sola equazione della seguente forma:
i) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ non degenere senza punti reali.
ii) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ non degenere a punti ellittici.
iii) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ non degenere a punti iperbolici.

Esercizi. Determinare la forma canonica proiettiva (come quadrica complessa e come quadrica reale) delle quadriche assegnate. In qualche esempio, determinare una trasformazione di coordinate che muta la quadrica nella sua forma canonica.

10.10 Classificazione affine.

Siano $Q \subset \mathbf{A}^n$ una quadrica affine non degenere e si denoti con lo stesso simbolo $Q \subset \mathbf{P}^n$ il completamento proiettivo. Sia $\delta \in \pi_\infty$ una direzione, non appartenente a Q.

Definizione 10.10.1 *Un iperpiano* π *si dice* iperpiano di simmetria per la direzione δ *se, per ogni retta* r *avente la direzione di* δ *e non tangente a* Q*, indicati con* A *e* B *i punti di* $r \cap Q$*, si ha che il punto medio* M *tra* A *e* B *appartiene a* π*.*

Se $n = 2$, π_δ è *asse di simmetria* per la direzione δ, per (10.8.6), e si dice *diametro.*
Se $n = 3$, π_δ è *iperpiano di simmetria* per la direzione δ, e si dice *iperpiano diametrale.*
Questa osservazione giustifica la definizione più generale:

Definizione 10.10.2 *Un* iperpiano diametrale *è un iperpiano polare di una direzione non appartenente a* Q*.*

Definizione 10.10.3 *Un punto* $C \in \mathbf{A}^n$ *si dice* centro di simmetria *per* Q *se per ogni retta* r *per* C *non tangente a* Q*, indicati con* A *e* B *i punti di* $r \cap Q$*, si ha che* C *è il punto medio tra* A *e* B*. In tal caso, si dice che* A *è il simmetrico di* B *rispetto a* C*.*

Osservazione 10.10.4 Una quadrica affine ammette un centro di simmetria $C \in \mathbf{A}^n$ se e solo se il polo di π_∞ è un punto proprio, e in tal caso C è il polo di π_∞.

Definizione 10.10.5 *Una quadrica non degenere affine si dice* paraboloide *se il suo completamento è tangente a* π_∞*. Altrimenti,* Q *si dice* quadrica a centro.

Esempio 10.10.6 Una conica non degenere piana Q di matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ in un sistema di riferimento è una *parabola* se e solo se la sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna di $\mathbf{A}$ ha determinante nullo. Altrimenti, Q è una conica a centro, e le coordinate del suo centro di simmetria si ottengono come soluzione del sistema omogeneo la cui matrice si ottiene da $\mathbf{A}$ cancellando la prima riga: le equazioni così ottenute sono infatti le equazioni delle polari dei punti fondamentali del riferimento che appartengono a π_∞.

Esercizi. Dire se le seguenti quadriche sono paraboloidi o quadriche a centro; in quest'ultimo caso, determinare esplicitamente il centro.
i) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$ in $\mathbf{A}^2$;
ii) $x^2 + 2xy - 3x + 2y + 1 = 0$ in $\mathbf{A}^2$;
iii) $x^2 + 2xy + 6y^2 + z^2 + x - y + 1 = 0$ in $\mathbf{A}^3$.

10.11 Classificazione metrica delle quadriche reali.

Sia Γ una conica non degenere reale in uno spazio euclideo $\mathbf{E}^2$ di dimensione 2. Un diametro π_δ per Γ (cioè la polare di un punto δ in π_∞ che non appartenga a Γ) è *diametro di simmetria ortogonale* se e solo se è ortogonale a δ.

Se Γ è una parabola, esiste un diametro di simmetria ortogonale. In un sistema di riferimento in cui tale diametro sia l'asse x e l'asse y sia ortogonale all'asse x e passante per l'intersezione tra l'asse x e Γ, la conica ha equazione $y = 2px$; orientando opportunamente gli assi, è possibile assumere che $p > 0$.

Se Γ è una conica a centro, ha equazione della forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2cy + f = 0 \tag{10.36}$$

e matrice associata:

$$\begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

Il punto $[0, \lambda, \mu]$ ha iperpiano polare di equazione affine $(\lambda d + \mu e) + (\lambda a + \mu b)x + (\lambda b + \mu c)y = 0$, di direzione $[0, -\lambda b - \mu c, \lambda a + \mu b]$, detta *direzione coniugata* di $[0, \lambda, \mu]$. Le due direzioni sono ortogonali se:

$$-\lambda^2 b - \lambda\mu c + \lambda\mu a + \mu^2 b = 0 \tag{10.38}$$

$$\lambda^2 b + \lambda\mu(a - c) - \mu^2 b = 0 \tag{10.39}$$

La condizione di ortogonalità (10.39) è identicamente nulla se e solo se $b = 0$ e $a = c$, cioè la conica ha equazione $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed è una circonferenza di centro $C(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ e raggio $\rho = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$.

Osservazione 10.11.1 *Γ è una circonferenza se e solo se contiene i punti $[0, 1, i]$, $[0, 1, -i]$, detti* punti ciclici.

Se la condizione di ortogonalità (10.39) non è identicamente nulla, il discriminante $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$ è positivo ed esiste dunque una coppia di assi di simmetria ortogonale. In un sistema di riferimento in cui tali assi siano gli assi coordinati, la conica assume un'equazione della forma:

$$ax^2 + cy^2 + 1 = 0 \tag{10.40}$$

che può essere scritta, in modo unico, in uno delle seguentiforme, dette *equazioni canoniche*:

a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$ e la conica si dice *ellissi senza punti reali*;

b) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica si dice *ellissi reale*;

c) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ e la conica si dice *iperbole.*

Ricerca delle equazioni canoniche di una conica reale, utilizzando gli invarianti.

Sia $(1, x, y)\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ l'equazione di Γ. Si denoti con $\mathbf{A}_{11}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna; $\mathbf{A}_{11}$ è la matrice della intersezione di Γ con la retta impropria, nel riferimento associato.

Osservazione 10.11.2 *det* $\mathbf{A}$*, det* $\mathbf{A}_{11}$ *e la traccia di* $\mathbf{A}_{11}$ *sono invarianti metrici di* Γ*.*

Dim. Le formule di cambiamento di riferimento ortogonale sono:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + d_1 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + d_2 \end{aligned} \tag{10.41}$$

che possono essere scritte come

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

con $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ matrice ortogonale. Si osservi, in particolare, che la matrice $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_1 & c_{11} & c_{12} \\ d_2 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$ ha determinante uguale a ± 1. Cambiando riferimento, la matrice associata alla conica è $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^t\mathbf{A}\mathbf{C}$ e, in particolare, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ hanno lo stesso determinante. Inoltre, la sottomatrice di $\mathbf{A}'$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna è $\mathbf{A}'_{11} = \mathbf{D}^t\mathbf{A}_{11}\mathbf{D} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{11}\mathbf{D}$ ($\mathbf{D}^t = \mathbf{D}^{-1}$ perché $\mathbf{D}$ è diagonale). La tesi segue, osservando che, allora, $\mathbf{A}'_{11}$ e $\mathbf{A}_{11}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, i cui coefficienti sono il determinante e la traccia della matrice. $\triangle$

Esempio 10.11.3 a) Se Γ è una parabola, ammette equazione della forma $a\,y^2 = 2px$, e i coefficienti a e p possono essere determinati nel modo seguente:

$$det\mathbf{A} = det\begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = -p^2 \tag{10.43}$$

$$det\mathbf{A}_{11} = det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0$$

$$tr\mathbf{A}_{11} = a.$$

b) Se Γ è una conica a centro, esse ammette una equazione della forma $ax^2 + by^2 + c = 0$. Osservando che:

$$det\mathbf{A} = a\,b\,c \tag{10.44}$$

$$det\mathbf{A}_{11} = a\,b \tag{10.45}$$

$$tr\mathbf{A}_{11} = a + b \tag{10.46}$$

si vede facilmente che *a e b sono gli autovalori di $\mathbf{A}_{11}$ e $c = \frac{det\mathbf{A}}{det\mathbf{A}_{11}}$.*

Esercizi. Determinare la forma canonica metriche delle coniche di equazione, rispettivamente:

i) $x^2 - 9y^2 + 2x = 0$;

ii) $3x^2 - y^2 + 2xy + 3 = 0$;

iii) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x = 0$.

Determinare inoltre un cambiamento i coordinate che permette di ottenere la forma canonica.

Caso generale. Classificazione metrica delle quadriche. Sia Q una quadrica nello spazio affine euclideo $\mathbf{E}^n$.

Definizione 10.11.4 *Si dicono* piani principali *i piani diametrali di simmetria ortogonale.*

Se $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = 0$ è l'equazione del completamento proiettivo di Q in un sistema di riferimento, l'iperpiano polare π_δ rispetto a Q di una direzione $\delta(0, \lambda, \mu, \nu)$ ha equazione:

$$\begin{aligned}(a_{01}\lambda + a_{02}\mu + a_{03}\nu)x_0 + (a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu)x_1 + \\ +(a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu)x_2 + (a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu)x_3 = 0\end{aligned} \tag{10.47}$$

La direzione δ è ortogonale a π_δ se e solo se esiste $\rho \neq 0$ con:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu &= \rho\,\lambda \\ a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu &= \rho\,\mu \\ a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33}\nu &= \rho\,\nu \end{aligned} \tag{10.48}$$

Dunque, *$\delta(0, \lambda, \mu, \nu)$ è ortogonale a π_δ se e solo se (λ, μ, ν) è un autovettore (non nullo) di $\mathbf{A}_{11}$*, e ρ è in tal caso il relativo autovalore.

Osservazione 10.11.5 a) Esiste almeno un piano diametrale.

b) Se Q è una quadrica a centro, esistono tre piani principali indipendenti.

Proposizione 10.11.6 Classificazione metrica dei paraboloidi. *Se Q è un paraboloide, esiste un sistema di riferimento in cui Q ha equazione della forma:*

$$2z = px^2 + qy^2. \tag{10.49}$$

Q si dice paraboloide ellittico *se $p, q > 0$,* parabolide iperbolico *se $p > 0,\ q < 0$.*

Proposizione 10.11.7 Classificazione metrica delle quadriche a centro. *In un sistema di riferimento in cui i piani coordinati sono i tre piani principali, e l'origine è il centro, la quadrica ha equazione della forma:*

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 1 = 0. \tag{10.50}$$

Precisamente, l'equazione può essere scritta in una sola delle seguenti forme ($0 \neq a, b, c \in \mathbf{R}$:

i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *e la quadrica si dice* ellissoide senza punti reali*;*

ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *e la quadrica si dice* ellissoide a punti reali*;*

iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *e la quadrica si dice* iperboloide ellittico*;*

iv) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ *e la quadrica si dice* iperboloide iperbolico.

Esercizi.

a) Determinare la forma canonica metrica della quadrica di equazione $2x^2+y^2-2yz+z^2-4y+3z+1=0$. Determinare, inoltre, un piano di simmetria ortogonale per esso, se possibile.

b) Determinare gli assi di simmetria e il centro della conica Q di equazione $2x^2+4y^2-x+2y=0$. Determinare inoltre il cambio di coordinate che muta l'equazione di Q nella sua forma canonica metrica.

c) Determinare l'asse di simmetria ed il vertice della parabola di equazione $4x^2-4xy+y^2+4y=0$.

d) Determinare la classificazione metrica della quadrica di $\mathbf{E}^3$ di equazione $2x^2+4xy+5y^2-2z^3+4x+13y-(1/4)=0$.

10.12 Esercizi ed esempi.

Nello spazio affine 3-dimensionale, si consideri fissato un riferimento.

1) La quadrica Q di equazione $2x^2-y^2+xy-yz+x+4y+3z-3=0$ è doppiamente degenere. L'intersezione di Q con la retta di equazioni $y=z=0$ è data da $y=z=0, 2x^2+x-3=0$, ed è formata dai punti $(1,0,0)$, $(-\frac{3}{2},0,0)$, i cui iperpiani polari formano le componenti di Q: le componenti di Q hanno pertanto equazione $x+y+z-1=0$ e $2x-y+3=0$ rispettivamente.

2) *Determinare le componenti della quadrica Q di equazione $2x^2-2y^2-z^2+3xy-xz+3yz+3x+y+1=0$.*

3) *Mostrare che la quadrica Q di equazione $x^2+2y^2-z^2+xz-5x-4y+5z-3=0$ è un cono a punti reali di vertice $V(1,1,3)$.*

   Basta osservare che la matrice $\mathbf{A}$ associata a Q ha rango 3 e $(1,1,1,3)$ genera lo spazio delle soluzioni di $\mathbf{xA}=\mathbf{0}$. Infine, il completamento proiettivo di Q interseca l'iperpiano all'infinito in una conica a punti reali perchè $\mathbf{A}_{11}$ non è definita.

4) *Mostrare che la quadrica Q di equazione $xy+xz+yz-x+y-z-\frac{5}{4}=0$ è un cono di vertice $V(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.*

5) *Mostrare che la quadrica Q di equazione $x^2+y^2+3z^2+xy-3xz-3yz-1=0$ è un cilindro ellittico e determinare la classificazione metrica della conica γ intersezione di Q con il piano $z=0$.*

   La matrice $\mathbf{A}$ associata a Q ha rango 3, mentre $\mathbf{A}_{11}$ ha rango 2 ed è semidefinita positiva: dunque Q è un cilindro ellittico. Il vertice del completamento proiettivo di Q è $[0,1,1,1]$.

   Il piano $z=0$ interseca Q nella conica γ di equazione $x^2+y^2+xy-1=0$ nelle coordinate del piano, la cui matrice associata $\mathbf{B}$ ha determinante (non nullo) uguale a $-\frac{3}{4}$ e dunque γ è non degenere. La sottomatrice $\mathbf{B}_{11}$ è definita positiva e dunque γ è una ellisse; la forma canonica metrica di γ sarà del tipo $ax^2+by^2+c=0$, con a, b autovalori di $\mathbf{B}_{11}$ e $c=\frac{det\,\mathbf{B}}{det\,\mathbf{B}_{11}}=-1$. Si verifica facilmente che $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$.

6) *Mostrare che la quadrica di equazione $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-2x+4y-4z-3=0$ è un cilindro di vertice $V[0,1,1,0]$.*

7) *Sia Q la quadrica di equazione $x^2 - y^2 + xz - x - 1 = 0$ e si indichi con γ la sezione di Q con il piano π di equazione $3x - 2y + z - 3 = 0$. Determinare la classificazione affine di γ.*

L'intersezione di γ con la retta impropria r_∞ di π è composta da due punti immaginari coniugati. Dunque γ è una ellisse o una coppia di rette immaginarie coniugate. Ma la proiezione di γ sul piano $z = 0$ è la coppia di rette immaginarie di equazione $z = 0, -2x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0$, e quindi anche γ è composta da una coppia di rette immaginarie coniugate.

In particolare, la quadrica Q ha punti ellittici.

8) Sia Q la quadrica di equazione $2xy - 2xz + 2yz + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ e si indichi con γ la sezione di Q con il piano π di equazione $x + 2y + z = 0$. Verificare che γ è una iperbole e determinarne il centro.

La conica γ interseca la retta impropria di π in due punti reali distinti, ed è dunque una iperbole o una coppia di rette reali. Più precisamente, γ è una iperbole, perché la proiezione di γ sul piano $z = 0$ è una iperbole. Il centro di γ è l'intersezione di π con la retta polare r' della retta impropria r_∞ di π. La retta polare r' ha equazioni $x-z = 0, x-2y+3z-3 = 0$, per cui il centro C di γ ha coordinate $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si verifica facilmente che C risulta anche essere centro di Q.

9) *Sia Q la quadrica di equazione $x^2 + y^2 + 2xy + 3yz + x - y = 0$ e si indichi con γ_k la sezione di Q con il piano di equazione $y = k$. Studiare la conica γ_k.*

Nel riferimento indotto in $y = k$, la conica γ_k ha equazione $x^2+kz+(2k+1)x+(k(k-1) = 0$, la cui matrice associata $\mathbf{A}$ ha determinante non nullo se e solo se $k \neq 0$, mentre la sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$ ha rango 1 per ogni valore del parametro. Pertanto γ_k è una parabola per $k \neq 0$. Per $k = 0$, γ_k è composta da una coppia di rette parallele (la matrice associata ha rango 2 in tal caso).

10) *Sia Q la quadrica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 2x + 2y = 0$. Determinare le rette contenute in Q e passanti per $P(1, 1, 2)$.*

Il punto P appartiene a Q e le rette cercate si individuano come intersezione di Q con il piano tangente a Q in P (che è l'iperpiano polare π_P di P rispetto a Q, ed ha equazione

$x + 3y - 2z = 0$): si determinano così due rette, ottenute come intersezione di π_P con i piani di equazione $2y - 3z + 4 = 0$ e $2y - z = 0$ rispettivamente.

11) *Determinare le rette per l'origine contenute nella quadrica di equazione* $x^2 - 2y^2 + z^2 - 3xy + xz + 2yz + z = 0$.

12) *Determinare le rette per l'origine contenute nella quadrica* Q *di equazione* $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4yz - x + z = 0$.

L'intersezione di Q con il piano tangente a Q nell'origine è data da $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4yz = 0, -x + z = 0$ ed è dunque composta da una unica retta contata due volte. In particolare, la quadrica Q è degenere. Per esercizio, *verificare che la quadrica* Q *è un cilindro di vertice* $V[0, 1, 1, 1]$.

13) *Sia* Q *la quadrica di equazione* $xy = z$. *Determinare i piani tangenti a* Q *e paralleli al piano* π *di equazione* $2x + y - z = 0$.

Primo modo: bisogna determinare i valori del parametro k per i quali la conica intersezione $z = xy, 2x + y - z = k$ risulti degenere. Equivalentemente, si possono studiare le proiezioni $2x + y - xy = k$ sul piano $z = 0$: una tale proiezione è degenere se e solo se si annulla il determinante della matrice associata, cioè se e solo se $k = 2$. (si osservi che il piano improprio π_∞ risulta tangente a Q)

Secondo modo: i piani cercati sono i piani passanti per la retta $r_\infty = \pi \cap \pi_\infty$ e tangenti a Q, e dunque sono i piani del fascio per r_∞ che passano per uno dei punti dell'intersezione di Q con la retta polare r' di r_∞.

14) *Sia* Q *la quadrica di equazione* $x^2 + 2y^2 - z^2 + xy - x = 0$. *Determinare i piani tangenti a* Q *e passanti per la retta di equazioni* $x = y = z$.

15) *Sia* Q *la quadrica di equazione* $x^2 - 2y^2 + z^2 - z = 0$. *Determinare il cono circoscritto a* Q *dal punto* $P(1, 1, 1)$.

Primo modo: ogni retta per P ha equazione parametrica della forma:

$$x = 1 + \lambda t$$
$$y = 1 + \mu t$$
$$z = 1 + \nu t$$

e tale retta è tangente a Q se e solo se interseca in un unico punto il completamento proiettivo di Q. L'annullarsi del discriminante fornisce l'equazione: $(2\lambda+4\mu+\nu)^2-12(\lambda^2+2\mu^2+\nu^2)=0$. Sostituendo in essa le relazioni $\lambda=\frac{x-1}{t}$, $\mu=\frac{y-1}{t}$,$\nu=\frac{z-1}{t}$ si ottiene l'equazione cercata.

Secondo modo: la direttrice del cono cercato è l'intersezione di Q con il piano polare di P.

16) *Sia Q la quadrica di equazione $x^2+2y^2-z^2+xy-x+z=0$. Mostrare che Q è una quadrica a centro e determinare le coordinate del centro C.* (Risulta $C(\frac{4}{7},-\frac{1}{7},\frac{1}{2})$).

17) *Dire se la quadrica Q di equazione $x^2-y^2+z^2+2xz+x+2z+1=0$ è una quadrica a centro.*

18) *Il cono asintotico di una quadrica a centro Q di equazione $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+lz+m=0$ è il cono circoscritto dal centro $C(x_0,y_0,z_0)$, ed ha equazione: $a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2+c(z-z_0)^2+2d(x-x_0)(y-y_0)+2e(x-x_0)(z-z_0)+2f(y-y_0)(z-z_0)=0$.*

19) *Determinare il cono asintotico della quadrica Q di equazione $x^2+2y^2-z^2+xy-x+z=0$.*

20) Una quadrica non degenere è una sfera se e solo se contiene l'assoluto Γ_0, di equazione $x_0=0, x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.

21) *Polarità rispetto all'assoluto.* Due direzioni sono coniugate rispetto all'assoluto se e solo se sono ortogonali tra loro.

22) *Sezioni circolari di una quadrica reale.* Una sezione γ di una quadrica reale Q ed un piano reale π è una sezione circolare (cioè γ è una circonferenza) se e solo se γ è non degenere e γ interseca la retta impropria di π nei punti ciclici (cioè $\gamma\cap\pi_\infty=\gamma\cap\Gamma_0$ è una coppia di punti).

   a) La quadrica Q sia un paraboloide ellittico. Allora, $Q\cap\pi_\infty$ è composta da due rette immaginarie coniugate $s,\overline{s}$.

      i) Se $s\cap\Gamma_0=\{A,B\}$ è formata da due punti distinti, risulta $\overline{s}\cap\Gamma_0=\{\overline{A},\overline{B}\}$ e $Q\cap\Gamma_0$ è formato da due coppie di punti immaginari coniugati. Ogni piano del fascio di asse la retta $<A,\overline{A}>$ (cioè ogni piano parallelo alla giacitura $<A,\overline{A}>$) taglia coniche che passano per i punti ciclici: tali coniche sono sezioni circolari, tranne due casi in cui la conica tagliata risulta degenere (e allora è una coppia di rette immaginarie coniugate, il cui punto di intersezione si dice *ombelico*). Analogo è vero per la giacitura $< B, \overline{B} >$.

ii) Altrimenti, s e $\overline{s}$ sono entrambe tangenti a Γ_0, in due punti immaginari coniugati $A, \overline{A}$; in tal caso $< A, \overline{A} >$ è la giacitura dei piani che tagliano sezioni circolari e la quadrica è un paraboloide ellittico di rotazione. L'asse di rotazione è la retta polare di $< A, \overline{A} >$ rispetto a Q.

b) Un paraboloide iperbolico non ha sezioni circolari.

c) Le sezioni circolari di un cilindro ellittico si studiano in modo analogo al caso del paraboloide ellittico, distinguendo un caso con due fasci di sezioni circolari ed il cilindro circolare retto (di rotazione).

d) Il cilindro iperbolico ed il cilindro parabolico non hanno sezioni circolari.

e) Ellissoide: Q ha equazione della forma di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$. Se Q non è una sfera, $Q \cap \Gamma_0$ ammette su π_∞ le equazioni:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

può essere composto da due coppie di punti coniugati o da una coppia di punti coniugati. Nel primo caso, si hanno due fasci di sezioni circolari, mentre nel secondo caso la quadrica è di rotazione e c'è un unico fascio di sezioni circolari.

Si osservi che le circonferenze risultano immaginarie se l'ellissoide è immaginario.

f) Il caso del cono immaginario si discute in modo analogo.

g) Iperboloide: Se Q non è una sfera, $Q \cap \Gamma_0$ può essere composto da due coppie di punti coniugati o da una coopia di punti coniugati. Nel primo caso, si hanno due fasci di sezioni circolari, mentre nel secondo caso la quadrica è di rotazione.

h) Il caso del cono reale si discute in modo analogo.

23) *La quadrica Q di equazione $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - x - y = 0$ ammette la retta di equazione $x - y = 0, z = 0$ come asse di rotazione.*

L'intersezione di Q con l'assoluto è data da $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0$, cioè $z^2 = 2xy, (x + y)^2 = 0$, ed è composta dai punti $(1, -1, \pm i\sqrt{2})$. Si osservi che Q_∞ è composta da una coppia di rette, ciascuna tangente all'assoluto.

Bibliografia

[AL] C.Ciliberto, Algebra lineare, Bollati Boringhieri, 1994.