Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Secondo esonero di Geometria 3 (Prof. F. Tovena) 17 febbraio 2012
Giustificare le risposte con chiarezza.

1) Sia X lo spazio topologico dato da $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea. Considera la relazione definita, per ogni (x, y) e $(x', y') \in \mathbf{R}^2$ da

$$(x, y)\, \rho\, (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x - x' \in 2\mathbf{Z} \\ y = y' \end{cases}$$

Denota con Y lo spazio quoziente di X rispetto a ρ.

1.a) Mostra che ρ è una relazione di equivalenza.

1.b) Dimostra che Y è omeomorfo a $S^1 \times \mathbf{R}$ (con la topologia prodotto delle topologie euclidee).

1.c) Determina il gruppo fondamentale di Y nel punto dato dalla classe di equivalenza dell'origine $O = (0, 0)$.

2) Sia $X = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$, con la topologia euclidea τ e sia ∞ un elemento che non appartiene a $\mathbf{R}^n$. Considera l'insieme $Y = X \cup \{\infty\}$. Posto $\mathcal{B}_\infty$ l'insieme dei sottoinsiemi di Y il cui complementare è un sottoinsieme finito di X, l'unione $\tau' = \tau \cup \mathcal{B}_\infty$ è una topologia su Y.

Dimostra o esibisci un controesempio per ciascuna delle seguenti affermazioni:

2.a) (Y, τ') è compatto.

2.b) X è un sottoinsieme aperto di (Y, τ') e la topologia indotta da (Y, τ') su X è proprio τ.

2.c) (Y, τ') è di Hausdorff.

2.d) (Y, τ') è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff X^*.

3) Siano X uno spazio topologico, A, B, A', B' suoi sottospazi non vuoti propri tali che A sia omotopicamente equivalente ad A' e B sia omotopicamente equivalente a B'. Mostra o trova un controesempio alla seguente affermazione: il sottospazio $A \cup B$ è allora omotopicamente equivalente al sottospazio $A' \cup B'$.